Les planimètres (texte actualisé le 16 août 2004)[1]

Serge Savoysky, Dr ès Sc

J.R. Berland m'a spontanément communiqué des ouvrages de sa bibliothèque, tout le temps nécessaire, fort utiles pour la préparation de cette note. Le Dr J. Fischer avec la même spontanéité a relu ce texte et signalé les erreurs que j'avais commises. Je les remercie tous deux bien sincèrement.

ndlr : Dans le texte, les chiffres romains renvoient vers la bibliographie, les chiffres arabes vers les notes de bas de pages.

Récemment encore, les planimètres et, plus généralement les intégrateurs qui ne sont pas examinés dans cette note, tinrent une place importante dans l'équipement des laboratoires et des bureaux d'étude : ce furent d'excellents instruments mathématiques au service des techniques du chercheur et de l'ingénieur ; désormais, ils sont devenus pour la plupart des objets de collection.

Disserter sur des instruments de mathématique sans mathématique est une gageure. Or, une association de collectionneurs est une société plurielle… qualité dans la mode du temps sans parti pris ; il convient donc de solliciter prudemment l'indulgence des lecteurs : ce qui sera jugé banal par les uns, alliés du parti de la mathématique, semblera peut-être ésotérique et inutile pour les autres, dans l'opposition à ce parti.

Quelques développements mathématiques abrégés[2] parsèment cette note ; ils illustrent le contexte théorique mais incontournable des instruments décrits : ils montrent comment des expressions fort abstraites suscitèrent toutefois la conception d'instruments mécaniques très pratiques et fort répandus.

Pour le collectionneur, les instruments de mathématique constituent un monde passionnant. Chacun est bien plus qu'une belle antiquité manufacturée avec soin : il participa dans le passé à la conception et à l'édification de nombreux équipements, modestes ou prestigieux. Par conséquent, conserver ce patrimoine scientifique et technique ne consiste pas seulement à en amasser les objets ; il faut également sauvegarder le comment et le pourquoi de leur usage.

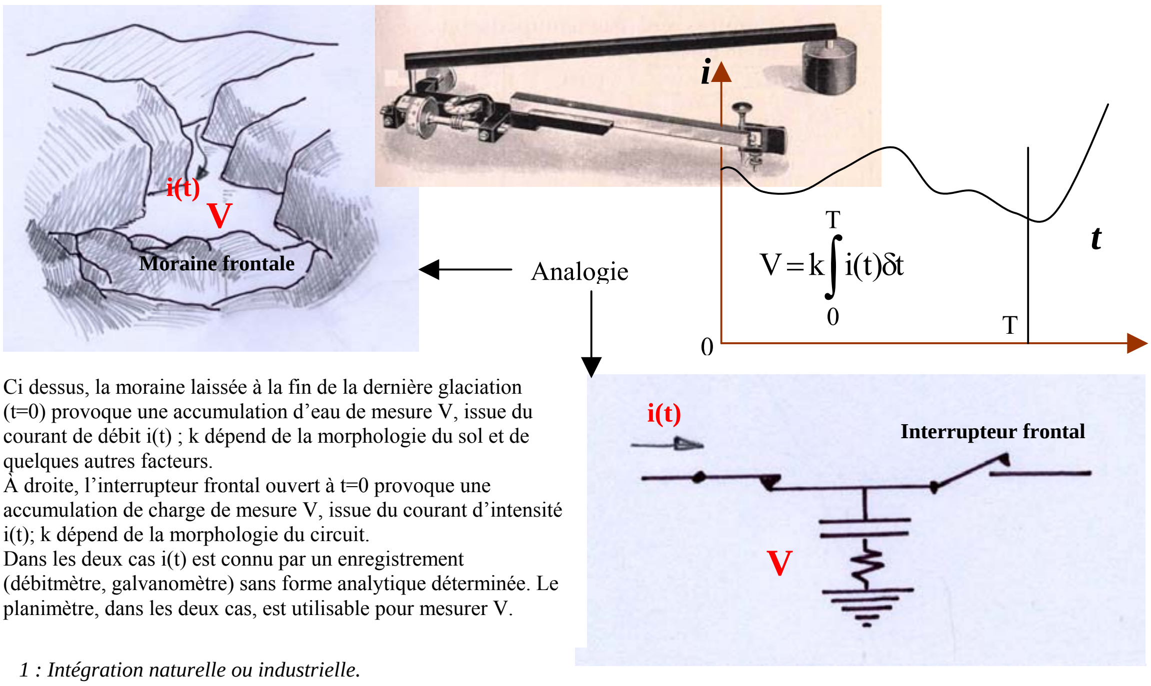
Remémorons donc l'environnement scientifique et technique de ce monde d'instruments parfois ancestraux (lvi), environnement loin d'être révolu, avant d'examiner l'une des familles qui le composent : les planimètres.

1 Environnement scientifique et technique

1.1 Introduction

Un planimètre sert à mesurer des aires ; or, un planimètre est un instrument d'intégration. Qu'est-ce donc alors que l'intégration ?

En confiant à sa tirelire les piècettes, récoltées çà et là, et en les comptant, un enfant apprend à thésauri-



Ci dessus, la moraine laissée à la fin de la dernière glaciation (t=0) provoque une accumulation d'eau de mesure V, issue du courant de débit i(t) ; k dépend de la morphologie du sol et de quelques autres facteurs.
À droite, l'interrupteur frontal ouvert à t=0 provoque une accumulation de charge de mesure V, issue du courant d'intensité i(t); k dépend de la morphologie du circuit.
Dans les deux cas i(t) est connu par un enregistrement (débitmètre, galvanomètre) sans forme analytique déterminée. Le planimètre, dans les deux cas, est utilisable pour mesurer V.

1 : Intégration naturelle ou industrielle.

---

1 Version actualisée, mais invérifiée dans sa forme, d'un article publié par Arts Mécaniques, octobre 2002.

ser ; ce faisant et sans le savoir, il exécute deux opérations : une intégration et un mesurage. La tirelire est son instrument d'intégration et l'arithmétique son procédé de mesurage… l'exemple est naïf mais incontestable. Moins naïvement, il est toujours possible de tracer une courbe fermée, dont on veut mesurer l'aire, sur un papier millimétré qui devient un instrument d'intégration ; le procédé de mesurage consiste à compter les carreaux millimétriques à l'intérieur de la courbe pour obtenir une valeur par défaut, et à compter ceux enfermant cette même courbe pour obtenir une valeur par excès.

La vie courante et, à plus forte raison, la vie scientifique et technique sont riches de tels exemples, moins simples que ceux cités, il est vrai. En effet tout dispositif, naturel ou fabriqué, de collecte et d'accumulation d'un objet physique est un intégrateur ; lorsque le fonctionnement d'un intégrateur est observable, le mesurage des quantités accumulées est une invention humaine, destinée à quantifier le résultat de l'observation.

L'intégration est donc un concept associé à de multiples faits de notre existence ; elle a inévitablement inspiré des lignées de mathématiciens et d'ingénieurs dans leurs activités respectives : le calcul intégral forme aujourd'hui l'un des chapitres majeurs de la mathématique pure et de ses applications aux techniques de l'ingénieur. La planimétrie et ses instruments, les planimètres, appartiennent à ce chapitre mais ils n'en constituent qu'un aspect. Ce qui suit situe approximativement leur place dans le vaste monde des techniques d'intégration.

1.2 Modélisation : outil d'ingénieur

Connaître, c'est d'abord investiguer. Pour l'ingénieur ou le chercheur, la modélisation du sujet étudié constitue généralement un puissant moyen d'investigation, souvent même incontournable ; elle voisine avec l'expérimentation car les deux se corroborent. La mathématique est un outil de modélisation.

Dans cet esprit, la mathématique est d'abord un outil d'élaboration de théories, abstraites et générales, destinées à décrire la constitution et le comportement[3] de familles de systèmes physiques, par exemple des ouvrages d'art ; ces théories expliquent comment exprimer des relations liant les grandeurs physiques imaginées pour caractériser ces systèmes ; la mécanique classique, la mécanique des milieux continus, la résistance des matériaux (RDM) sont des exemples courants, entre autres, de telles théories.

Ensuite, pour toute étude concernant un système réel particulier, par exemple un pont, l'ingénieur extrait de l'une ou l'autre de ces théories les éléments adéquats pour construire un modèle. Ce modèle est un ensemble particulier de relations, liant des grandeurs physiques choisies pour caractériser le système réel étudié. Certaines de ces grandeurs, directement accessibles par mesurage ou calculées antérieurement, ont des valeurs numériques connues : ce sont les données du problème posé. Les autres grandeurs ont des valeurs inconnues : elles constituent la solution recherchée.

Les valeurs numériques connues sont introduites dans le modèle ; l'exploitation du modèle ainsi renseigné permet alors d'obtenir la solution… à la condition qu'existe effectivement une solution, qu'elle soit calculable, unique et stable[4]. La connaissance de toutes ces valeurs permet alors d'effectuer des choix constructifs.

Fort judicieusement, dans de nombreux cas, cette démarche consiste à utiliser des formules appartenant à des modèles généraux classiques préétablis. Dans un exemple simple, si l'ingénieur choisit, pour construire un ponceau, des poutrelles métalliques de dimensions connues reposant sur des appuis de nature également connue, afin de supporter une charge donnée, alors la bonne vieille RDM lui fournit des formules toutes prêtes pour calculer les contraintes développées dans les poutrelles ainsi que les déformations en résultant[5] ; il recueille ainsi les valeurs lui permettant d'apprécier la pertinence de son choix et de le modifier éventuellement et ainsi de suite[6]… Il existait autrefois des recueils de formules, remplacés aujourd'hui par des logiciels, fournissant immédiatement et sans calcul fastidieux les résultats recherchés même pour des cas plus complexes que de simples ponceaux. C'est ainsi que notre Administration exploite des logiciels prêts à l'emploi pour calculer les ouvrages standards qui parsèment désormais les itinéraires autoroutiers.

Mais il n'en est pas toujours ainsi : les formules adéquates et prêtes à l'emploi, ne se trouvent pas toujours dans les manuels[7] ; restant dans le domaine de la construction, c'est de plus en plus souvent le cas au-

---

2 Au détriment de leur rigueur.

3 Morphologie et physiologie, termes proposés par le géomètre M. d'Ocagne, conviendraient parfaitement ; ces deux mots sont hélas pratiquement ignorés des ingénieurs.

4 Un modèle n'est qu'une représentation de la réalité. L'absence de solution ou sa résistance au calcul lorsqu'elle existe, enfin son instabilité lorsqu'elle est calculable forment les calamités qui accompagnent un mauvais modèle.

5 Ces formules résultent toutes d'un calcul intégral.

6 Cet exemple est réellement moins naïf qu'en apparence. Dans les pays en voie de développement, de tels ponceaux sont utiles. Les véhicules lourds modernes qui circulent désormais dans leurs districts même les plus reculés rendent nécessaires quelques précautions de conception : le pragmatisme ne suffit plus. En Afrique, l'École Inter États d'Ingénieurs du Génie Rural, installée à Ouagadougou, imagina de doter ses futurs ingénieurs de calculatrices de poche, équipées d'un tableur et d'une réserve suffisante en batteries, et de leur apprendre à se servir de cet équipement pour leurs calculs de formules de la RDM.

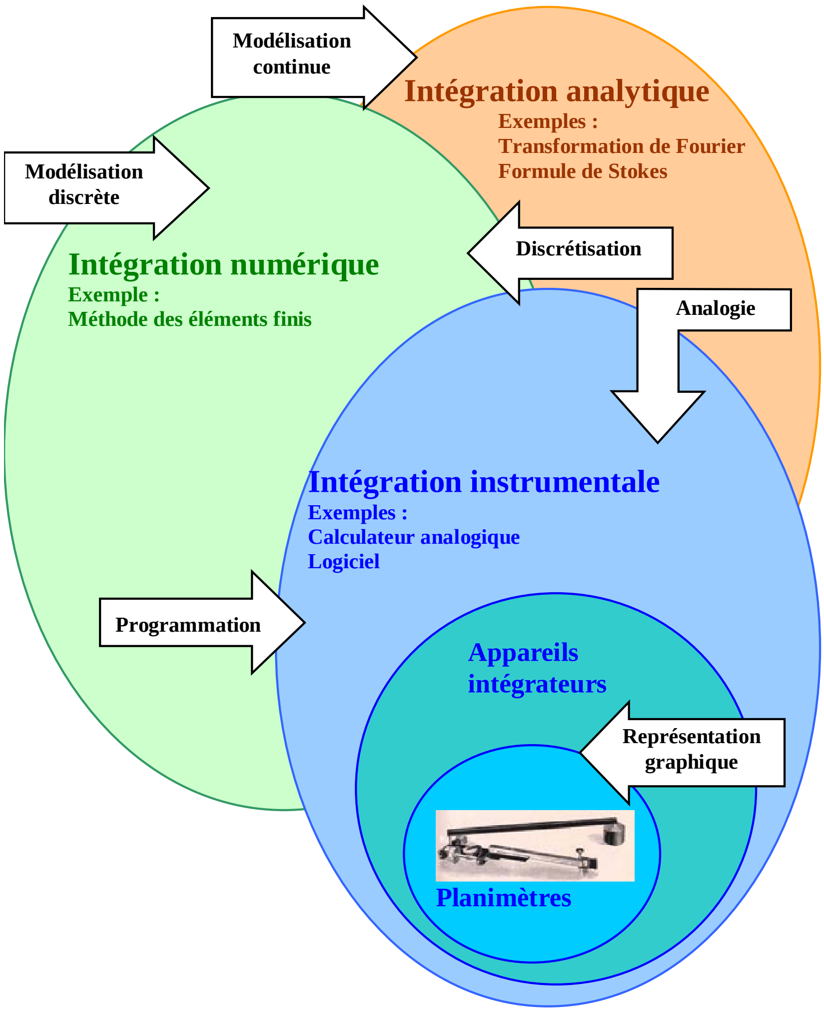
7 Dans le courant des années soixante, des appels d'offres furent lancés pour la construction du passage des pistes de Roissy au-dessus de l'autoroute A1 et pour le renforcement du passage des pistes d'Orly sur la N7 ; les spécifications dans ces appels d'offres devaient tenir compte des spécifications d'impacts des futurs gros porteurs. La RDM classique possédait des formules répondant théoriquement à ces problèmes ; or, formées de séries convergeant lentement et non uniformément, elles étaient

jourd'hui où l'apparition continuelle de nouveaux matériaux et de techniques de mise en œuvre modernes suscitent des projets de hardiesse croissante. L'ingénieur doit alors concevoir un modèle de l'ouvrage projeté avec lequel il pourra étudier ses comportements ; les franchissements autoroutiers d'obstacles naturels importants sont le plus souvent les objets de telles approches.

Dans ces démarches figurent inévitablement le calcul intégral et les instruments qui l'escortent pour sa pratique.

1.3 Calcul intégral : technique de modélisation

L'idée fondamentale de l'usage du calcul intégral consiste à isoler abstraitement, dans un intervalle de temps aussi petit que l'on veut, un élément du système également aussi petit que l'on veut ; un tel élément est dit infinitésimal. Pour tout élément ainsi isolé, de nombreuses hypothèses simplifiées d'existence et de comportement sont alors possibles : homogénéité, constance des caractéristiques mécaniques internes et aux limites, linéarité des relations entre contraintes et déformations, etc. Un modèle est ainsi construit : ce sont des relations, dites différentielles, entre les variations infinitésimales des grandeurs physiques au sein de tout élément infinitésimal de la structure, bien localisé dans l'espace et le temps. Cette modélisation est qualifiée de continue[8] dans la figure ci-contre.



2 : Techniques d'intégration, place des planimètres.

Or il existe une infinité continue de tels éléments. Il faut alors les assembler abstraitement pour obtenir le modèle global de la structure : c'est l'intégration du système d'équations différentielles ; intuitivement une telle opération est une sommation d'une quantité infinie de termes infiniment petits en quasi totalité. C'est ainsi que connaissant les propriétés d'un grain de sable quelconque, perdu dans un tas, on arrive à déterminer les propriétés de tout le tas[9].

Remarquons, dès à présent et plus sérieusement, qu'un planimètre en fonctionnement ne fait qu'assembler mécaniquement, en les balayant, une infinité de surfaces élémentaires infiniment petites (cf. : figure 20).

La formule de Stokes (George Gabriel, 1819-1903) établit une relation entre une intégrale double sur une surface et une intégrale simple sur le contour fermant la surface[10]. Un planimètre qui mesure l'aire d'une surface en parcourant son contour illustre pratiquement et particulièrement cette formule abstraite et générale. La formule de Green (George, 1793-1841), encore plus générale, établit une relation entre une intégrale triple dans un volume et une intégrale double sur la surface qui le limite.
La transformation de Fourier (Jean-Baptiste Joseph, Baron, 1768-1830), issue des réflexions d'un haut fonctionnaire d'Empire qui préférait la mathématique à l'administration, est actuellement l'un des fleurons du calcul intégral. C'est un outil remarquable pour les études de transmission et de traitement des signaux.

3 : commentaires sur la figure 2 (éléments biographiques : vii). Voir également la note 43.

Trois modes de solution, souvent exploités conjointement, sont disponibles :

---

pratiquement incalculables même avec les ordinateurs déjà existants à l'époque. Heureusement, la méthode des éléments finis était née.

8 Terme sanctionné par l'usage mais pas toujours exact.

9 Ouf ! Mais c'est une façon désinvolte de résumer de monumentaux ouvrages sur la question.

10 La formule de Stokes concerne des surfaces dans un espace tridimensionnel, par exemple, un film de savon liquide supporté par une boucle éventuellement tordue mais fermée. La formule de Green établit une relation entre une intégrale triple définie dans tout un volume et une intégrale double sur la surface fermant ce volume, par exemple une bulle de savon flottant dans l'air. Lorsque tous ces objets cauchemardesques sont aplatis, les deux formules simplifiées pour un espace à deux dimensions ee rejoignent. C'est heureux pour le planimète qui exploite ces formules sans le savoir.

l’intégration analytique,
l’intégration numérique,
l’intégration instrumentale.

Intégration analytique

L’intégration analytique consiste à déduire mathématiquement des équations différentielles, un ensemble de relations reliant algébriquement des fonctions connues, calculables numériquement, et ayant comme variables les grandeurs physiques précitées. Il arrive souvent que l’on ne sache pas effectuer cette intégration ; on cherche alors à transformer le système rebelle en un autre système que l’on sait résoudre ; la solution ainsi obtenue doit ensuite subir la transformation inverse pour procurer finalement la solution analytique du système initial. N’en doutons pas, c’est un travail de spécialistes bien entraînés[11] ; enfin il faut encore calculer numériquement le système final de relations ainsi obtenu, ce qui est également affaire de spécialistes[11].

Ce genre d’approche est utilisé généralement pour des systèmes nouveaux ; ce fut autrefois le cas de toutes sortes de systèmes mécaniques devenus usuels dans notre environnement moderne : réservoirs, ailes et cellules d’avions, etc. Souvent proposés comme sujets de recherches doctorales dans la première moitié du XX^{e} siècle, ce qui en montre le niveau, dans la pratique leurs solutions s’avéraient fréquemment numériquement inexploitables, en raison de l’insuffisance des moyens de calcul de l’époque. Cependant, lorsqu’elle était possible, la résolution numérique des équations obtenues analytiquement fut toujours un travail fastidieux. Elle mobilisa longtemps des cohortes de calculateurs professionnels munis des machines que nous collectionnons aujourd’hui. Les archives d’Universités sont riches de tels modèles malheureusement oubliés alors que se sont développés les moyens de les exploiter efficacement.

Intégration numérique

L’intégration numérique consiste à éviter l’intégration analytique en recourant à des calculs approchés directs ; l’intégration analytique étant une opération abstraite consistant à sommer un ensemble infini d’éléments infinitésimaux on lui substitue à cet effet une sommation concrète d’un ensemble dénombrable et fini d’éléments constituant, à une échelle macroscopique, des approximations acceptables des précédents. Cette substitution, nommée discrétisation, transforme le système analytique initial en système numérique ; certaines méthodes de travail permettent même l’obtention directe du modèle numérique ; c’est le cas en mécanique de la méthode dite des « éléments finis ». Cette voie était connue depuis longtemps mais, imposant des tâches de calcul souvent hors des possibilités humaines, elle fut peu exploitée jusqu’à l’apparition des ordinateurs.

L’émergence des ordinateurs remit donc en valeur ces techniques tout en révélant des problèmes d’analyse numérique restés latents : le modèle numérique doit posséder une solution unique et stable et ce n’est pas toujours le cas si la discrétisation est mal conçue. La seconde moitié du XX^{e} siècle a été marquée par une forte croissance de l’analyse numérique, établissant des méthodes de travail visant à garantir la pertinence des modèles numériques et leur calculabilité.

4 : Planimétrie au XVIe siècle.

Intégration instrumentale et planimètres

Le calcul instrumental consiste à utiliser un dispositif dont le modèle est en relation mathématique avec tout modèle de la classe de problèmes que l’on veut résoudre. Nous pouvons considérer qu’il s’agit, dans tous les cas d’une analogie ou d’une transformation, concrétisée l’une ou l’autre par un matériel, puisqu’il existe une relation mathématique stricte entre l’intégrale à calculer, ou le système d’équations à intégrer, et le fonctionnement de l’instrument. La pesée fut un procédé analogique de mesurage de surfaces aux contours complexes fréquemment utilisée autrefois (fig. 4)[12].

Plus récemment, lorsqu’un système physique possède un modèle mathématique difficilement exploitable numériquement, une solution pratique consistait à trouver un système d’une autre nature, par exemple électrique, facilement manipulable et possédant le même modèle : cette idée fut à l’origine des nombreux calculateurs analogiques qui ne furent supplantés que par les ordinateurs[13].

---

11 C’est le cas de la transformation de Fourier, citée figure 2, disponible à la fois pour l’intégration analytique et pour l’intégration numérique.

12 Magasin Pittoresque, 1851, xxxix . Cette méthode fut appliquée à une statistique agricole effectuée en 1788 en France par un agronome Anglais, Arthur Young. L’article cite néanmoins un précédent, décrit dans un ouvrage allemand de 1599 : *Methodus geometrica, das ist kurzer wolgegründer und ausführlicher Tractat von der Feldtrechnung und Messung*… attribué à un certain Paul Pfiezing (fig. 4). Il cite enfin l’instrument d’Oppikofer.

13 Dans de nombreuses écoles d’ingénieurs, les examens de mécanique consistent généralement à soumettre à la sagacité des élèves la conception et l’étude d’un modèle mathématique d’un système : vibrations d’une aile, écoulement dans une tuyère, etc. Avant l’arrivée des ordinateurs, l’examinateur demandait le plus souvent, en dernière question, d’imaginer un dispositif électrique

Dans de nombreuses études, le travail consiste à calculer l'aire d'une surface enfermée dans une courbe ou par plusieurs courbes. Or, toute courbe est représentable par une équation liant les coordonnées de chacun de ses points. En théorie, lorsque la courbe est fermée[14], l'aire de sa surface intérieure peut être déduite de cette équation, lorsque cette équation est connue et si certaines conditions sont respectées. Dans la pratique, souvent l'équation de la courbe n'est même pas connue, alors il faut procéder autrement.

Les planimètres, objets de cette courte monographie, sont de petits instruments destinés à mesurer rapidement l'aire intérieure de toute courbe fermée, en particulier lorsqu'on en ignore l'équation. Le modèle mathématique de ces instruments établit une relation entre leur cinématique et l'aire intérieure d'une courbe donnée quelconque ; la mesure de l'aire intérieure est fondée sur cette analogie.

Ainsi, les planimètres forment une classe de moyens du calcul intégral parmi de nombreuses autres procédés de calculs. Cette classe est toutefois l'une des plus importantes en raison de la fréquence de ses applications et de la simplicité d'emploi. La lecture de quelques articles parus dans le Génie Civil (xxii, xlvii, lii,lv) donne une idée du large éventail de leurs divers usages. Enfin signalons que la fonction d'intégration existe éventuellement dans bien d'autres instruments conçus pour effectuer des traitements autres que la simple intégration.[15].

2 PLANIMÈTRES

2.1 Introduction

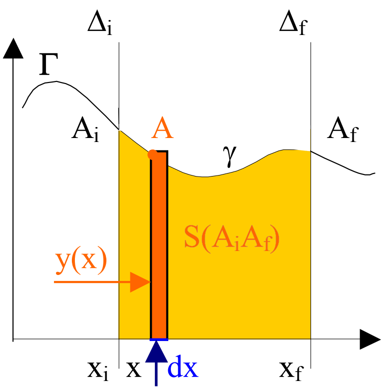
Des historiens réputés des sciences et techniques s'étant déjà intéressés à l'histoire des planimètres, nous reprenons les résultats de leurs recherches ; ces emprunts sont toutefois assortis d'une remarque : ils sont parfois discordants sur les dates.

Les appareils d'intégration furent généralement conçus pour répondre à des classes de problèmes pratiques intéressant les ingénieurs. Il résulte de ce fait qu'aucun n'est universel et que leur variété est remarquable[16] ; leur classification est donc malaisée. La présentation ci-dessous adopte un ordre empirique ; elle est loin d'être exhaustive puisque limitée aux cas les plus courants et à quelques cas atypiques. En outre, les appareils destinés à d'autres usages que la planimètrie, comme les analyseurs harmoniques, les calculateurs de moments, etc. ne sont pas abordés. Le lecteur curieux de détails dispose d'ouvrages importants sur ces appareils[17].

2.2 Propriété fondamentale

Soit Γ une courbe tracée dans un plan cartésien, d'équation quelconque (figure 5). Soit A un point de cette courbe de coordonnées (x, y(x)), parcourant un arc γ en passant continûment d'une position initiale A_i d'abscisse x_i à une position finale A_f d'abscisse x_f. La surface comprise entre Γ, l'axe des x et deux droites Δ_i et Δ_f parallèles à l'axe des y et passant respectivement par A_i et A_f a pour aire :

$$S(A_i,A_f) = \int_{x_i}^{x_f} y(x)\ dx = \int_{\gamma} y\ \delta x$$



5 :Intégrale, cas élémentaire.

y(x)dx représente l'aire du rectangle infinitésimal associé à tout point A d'abscisse x. Lorsque A se déplace le long de γ, le rectangle infinitésimal qui lui est associé balaie la surface colorée.

La première intégrale représente l'aire S de cette surface ; dans cette expression, y(x) est une fonction de la variable x et la sommation de y(x)dx est effectuée pour toutes les valeurs de x de x_i à x_f. Ce mode de calcul de S est applicable à toute courbe <u>graphe d'une fonction y(x)</u> mais est inapplicable dans les autres cas, notamment pour les courbes fermées.

La seconde intégrale représente également S. Dans cette expression, y et δx sont tous deux transformés en fonctions d'une même variable auxiliaire, ou paramètre, qui n'est pas explicitée ici ; cette variable est, par exemple, l'abscisse curviligne de A mesurée sur Γ à partir d'une origine arbitraire, par exemple A_i. <u>Cette seconde</u>

---

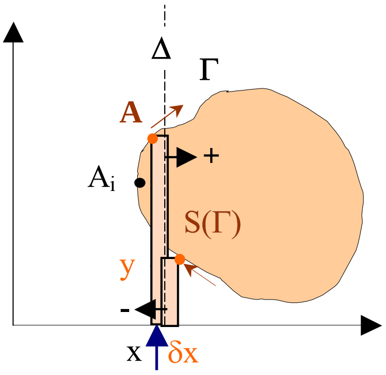
permettant de trouver par analogie une solution pratique à toutes les belles équations produites par l'élève. La figure 1 est un exemple – très simple – d'analogie.

14 S'il s'agit d'un arc de courbe, on considère alors la surface enfermée par cet arc, l'un des axes de coordonnées et deux droites parallèles à l'autre axe (cf. figure 5).

15 Lucas, 1890, xxxviii.

16 Le Catalogue du CNAM de 1942 (xi, pp.125/130) ainsi que l'actuel sur le WEB, illustrent bien cette diversité. De même le catalogue de l'exposition du Tricentenaire de Neper (xxviii).

17 Galle, 1912, xx ; Hammer, sd., xxvi ; Meyer, 1945, xliii, les bibliographies de ces ouvrages, tous allemands, sont riches de références… difficiles à exploiter.



6 : Cas d'une courbe fermée.

expression, abrégée ici, est en réalité et lorsqu'elle peut être établie[18], plus complexe que la précédente mais est applicable en général, notamment pour les courbes fermée.

Si Γ est une courbe fermée, A_f coïncide avec A_i, leurs abscisses curvilignes étant toutefois différentes ; la droite Δ passant par le point courant A balaie deux fois en sens opposés la surface comprise entre la partie inférieure de Γ et l'axe des x. La valeur algébrique mesurée de l'aire de cette partie de surface est nulle et la seconde intégrale ci dessus représente l'aire de l'intérieur de Γ.

Le principe du calcul de l'aire est donc simple mais, en l'absence d'expression analytique pour Γ il est irréalisable[19]. Les mathématiciens et ingénieurs du XIXe siècle, confrontés à ce problème, lui cherchèrent donc une solution instrumentale ; c'est le rôle du planimètre qui simule mécaniquement l'opération.

Le fonctionnement d'un planimètre repose en général[20] sur la cinématique de trois de ses éléments : un traceur destiné à parcourir la courbe, un bras porteur d'une roulette, enfin la roulette précitée dont la rotation, provoquée par le mouvement du traceur, est fonction de l'aire balayée par le bras traceur. Deux familles sont décrites ci-après, basées sur le principe de la cinématique liant le traceur, le bras porteur et sa roulette[21].

2.3 Premiers planimètres

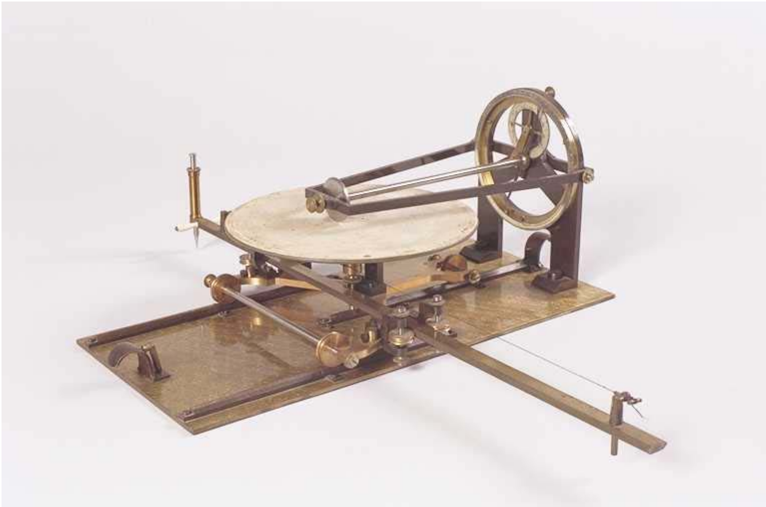
Description

Ils furent souvent généralement conçus sur la base de propriétés analogiques simples.

Soit r une roulette de rayon ρ. La position angulaire θ de la roulette est connue par une graduation devant laquelle elle se meut. Le but recherché dans le montage de la roulette est que tout déplacement infinitésimal de A sur Γ entraîne une rotation infinitésimale δθ proportionnelle à yδx :

$$\delta\theta = k\, y\, \delta x$$

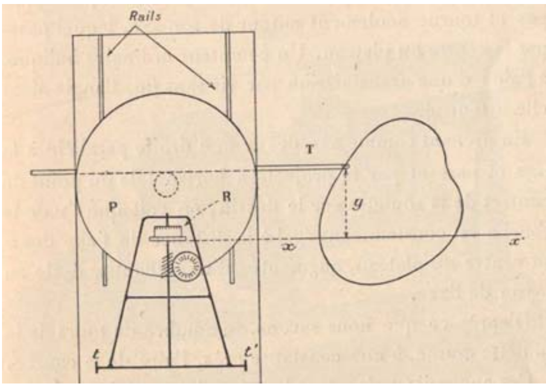
Soient θ_i la position angulaire initiale et θ_f la position angulaire finale de la roulette pour un parcours continu et complet de A sur Γ ; dans ces conditions :



7 : Planimètre de Wetli fabriqué par Starke, entre 1850 et 1870. Coll. Technik Museums der Technischen Universität Delft.

$$S(Ai,Af) = \int_{\Gamma} y\delta x = \frac{1}{k}\int_{\theta_i}^{\theta_f} \delta\theta = \frac{1}{k}(\theta_f - \theta_i)$$ [22]

La première des deux intégrations est effectuée pour toutes les valeurs de yδx correspondant à tous les points de Γ, la seconde est effectuée pour toutes les valeurs correspondantes de δθ, θ variant de θ_i à θ_f. La première intégrale est incalculable analytiquement, la seconde l'est exactement de manière très élémentaire ; le passage de l'une à l'autre des ces deux intégrales indique comment construire un planimètre.



8 : Principe de fonctionnement du planimètre de Wetli fabriqué par Starke, avec les notations de l'ouvrage (xlvi, page 59).

---

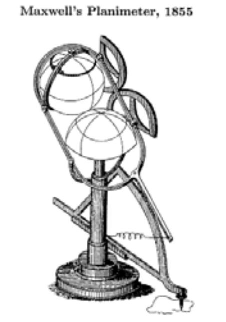
18 Rappelons que Γ est le plus souvent quelconque, obtenue par enregistrement d'un mesurage ; son équation exacte est donc inconnue.

19 Lorsque cette expression existe, l'intégration analytique reste très souvent bien difficile.

20 C'est le cas de la plupart des planimètres examinés dans cette monographie. Une exception de taille en raison de sa géniale simplicité : le planimètre de Prytz.

21 L'ouvrage du professeur Dr A.Galle (xx), le cours de géométrie de M. d'Ocagne (xlix), le cours de calcul différentiel et intégral du Dr Greenhill (xxiv) sont des références incontournables concernant la théorie de ces instruments. Migraine garantie.

22 Comparer cette ligne qui explique les planimètres des premières générations à la démonstration laborieuse et pourtant simplifiée à l'extrême qui explique les générations suivantes.



9 : Maxwell, 1855.

Le planimètre est formé d'un cône ou d'un disque dont la rotation autour de son axe est proportionnelle à l'abscisse x de A. Le bras porteur est conçu de façon que la position de la roulette le long d'une génératrice du cône, depuis son sommet, soit elle-même proportionnelle à y. Ces deux conditions étant réalisées simultanément la rotation instantanée de la roulette est proportionnelle à y δx.

Cette conception est simple, ce qui explique l'ancienneté de sa première publication puis de son usage ; par contre, sa concrétisation sous la forme d'un instrument nécessite une cinématique complexe : l'instrument doit être muni, à la fois, d'un mécanisme d'entraînement en rotation du cône proportionnelle au déplacement de la projection sur l'axe x du déplacement de A sur Γ et d'un mécanisme déplaçant la roulette sur une génératrice du cône ou du disque proportionnellement à y.

Les planimètres conçus sur ces bases sont donc en général dotés de mécanismes fort ingénieux mais de fabrication coûteuse et de maniement délicat. Leur diffusion en souffrit. Dans le planimètre de Wetli fabriqué par Starke (figures 7 et 8) le disque P (plateau) est entraîné en rotation par le déplacement du bras traceur T, parallèle à l'axe x, grâce à un câble solidaire de T et enroulé autour de son axe. P et T sont solidairement mobiles sur une paire de rails parallèles à l'axe y. L'axe de la roulette intégrante R est solidaire du bâti. Dans ces conditions la distance du point de contact de R sur P à l'axe de P est toujours égal à y. Les principes présentés ci dessus sont strictement appliqués dans cet exemple.

Rappel historique

Un planimètre, ordinaire ou spécialisé est utilisable pour les mesurages d'aires suivants effectués en général sur des plans, des photographies ou des enregistrements.

- **Thermodynamique** : diagramme de Watt (détermine l'énergie dispensée par un aller retour de piston) ;
- **Peausserie** : surface d'une peau ;
- **Aérodynamique** : surfaces délimitées par la courbe de dépression sur l'extrados d'une aile et la courbe de pression sur l'intrados (calcul de la force appliquée à la section d'une aile lors d'un essai en soufflerie) ;
- **Météorologie** : surface d'un enregistrement dans le temps d'une grandeur physique : température, pression, hygrométrie, etc. (l'aire divisée par la durée d'enregistrement détermine ensuite une valeur moyenne) ;
- **Cartographie** : surface d'un lac, d'un champ, d'une forêt ; surface des espaces verts dans une commune ;
- **Architecture** : surface d'un local ;
- **Matériaux** : surface apparente dans une section d'un matériau de chacun de ses éléments constitutifs (détermination de la composition d'un matériau détérioré lors d'une expertise) ;
- **Techniques spatiales** : surface apparente, sur une photographie, d'une batterie de cellules photosensibles pour différentes positions d'un satellite (détermination de l'énergie captée) ;
- etc.

Pour la plupart de ces mesurages, notamment le dernier cité, l'apport de l'informatique a évidemment considérablement modifié les méthodes de travail.

10 : Exemples d'utilisation.

L'apparition de ces instruments est magistralement contée par D. Baxandall dans le catalogue du *Science Museum* (vi)[23], [24] :

The invention of the first instrument for directly measuring an area bounded by an irregular curve appears to have been made by the Bavarian engineer, J M Hermann, in 1814. It was improved by Lämmle in 1816, and actually constructed in 1817. Tito Gonella[25] of Florence in 1824 invented independently a similar instrument. …[26]

The Swiss engineer Oppikofer invented in 1826 a planimeter which was similar to Gonella's first type (Wheel and cone). This was first made successfully by Ernst of Paris, who improved it and made it for general sale. In 1849, Wetli of Zürich independently invented the disc type of planimeter adapted fo both positive and negative co-ordinates, and the instrument was made by Starke of Vienna[27]. Hansen of Seeberg suggested improvements, which were embodied in the instrument made by Ausfeld, Known as the Wetli-Hansen planimeter. John Sang of Kircaldy invented and made in 1851 a 'platometer'[27] of the wheel and cone type, which resembled that made by Ernst.

---

23 Cet ouvrage simple et de qualité devrait figurer dans la bibliothèque de tout collectionneur.

24 Voir égalemant la note historique de Favaro, 1885, xviii, chap. XII, pp.353/366.

25 Gonella, 1825, xxiii. L'orthographe du texte original est respectée ici, cependant d'autres auteurs écrivent : Gonnella ; c'est le cas, en particulier, des auteurs du catalogue du Musée des Sciences de Florence.

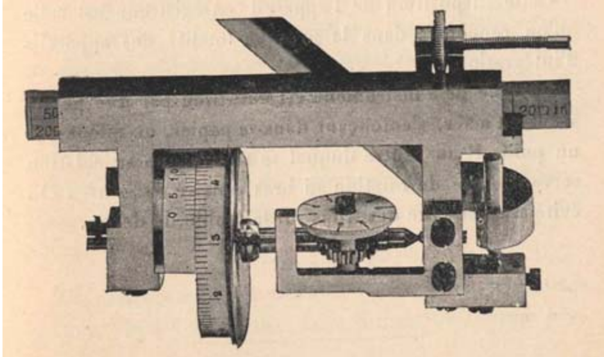
26 Suit la description de deux instruments.

27 Les renvois aux illustrations ne sont pas reproduits ici.

2.4 Planimètres à bras traceur et porteur de longueur constante

Les formes élémentaires furent très répandues, en raison de leur simplicité d'emploi et de leur prix abordable. Nous décrivons d'abord la forme la plus élémentaire répondant aux principes de fonctionnement, puis les aménagements apportés à différents modèles.

L'historique continue avec la présentation d'instruments plus tardifs, illustrant parfaitement les difficultés rencontrées par les premiers inventeurs pour réaliser à partir d'une idée simple un mécanisme fiable et économique. Une ancienne édition du catalogue du Deutsches Museum cite un « planimeter von Georg Zobel und Jos. Müller » en 1815 (xiv, p.208)[28].



11 : Assemblage des bras dans un planimètre ordinaire (extrait de xlvi).

Principes

Le détail abrégé des calculs est reporté dans le chapitre suivant.

Ce planimètre est constitué d'un bras A'A, portant un traceur et une roulette.

Le traceur A est un stylet dont la pointe doit être déplacée continûment sur la courbe Γ. Une roulette en acier est placée en B du côté de A' ; son axe est celui de A'A ou lui est parallèle. La mesure, modulo 2π, de la rotation de la roulette est assurée par une graduation qui lui est solidaire se déplaçant devant un vernier. Une vis hélicoïdale solidaire de l'axe de la roulette, entraîne un compte tours.

Deux conditions sont imposées :

- La configuration des points A, A' et B est invariable durant la mesure, ce qui signifie que le bras traceur et porteur est de longueur constante.
- A' est assujetti à se déplacer sur une courbe Γ' quelconque mais invariable durant la mesure.

La théorie montre que l'aire balayée par A A' <u>entre</u> Γ et Γ' est proportionnelle en grandeur et <u>en signe</u> à la rotation de la roulette. Si A parcourt totalement une courbe Γ fermée et <u>dans certaines conditions</u>, cette aire est réduite à celle de la surface de Γ.

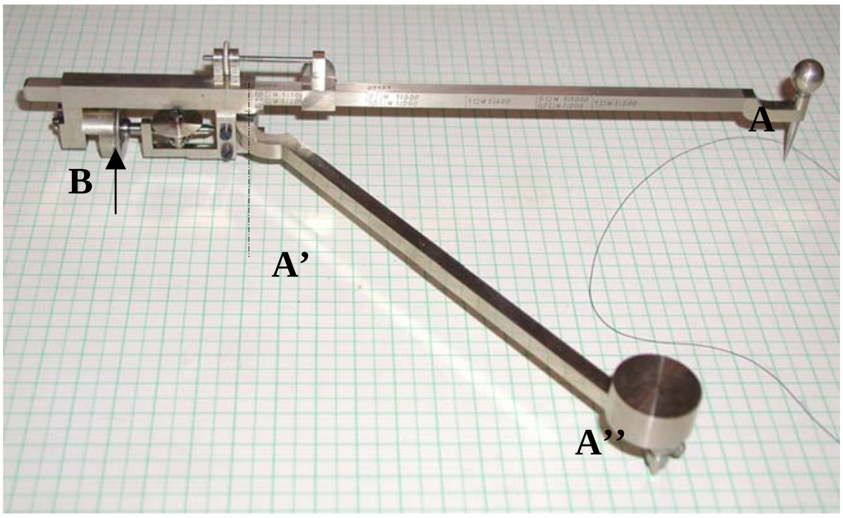
La première condition est simple à réaliser mécaniquement ; la seconde également si Γ' est un cercle ou une droite. Les premiers planimètres de cette famille étaient donc simples et économiques, ce qui entraîna leur succès immédiat. Maxwell, le génial père de l'électromagnétisme moderne, auteur vers 1856 d'un planimètre… compliqué (figure 9), reconnut immédiatement ce fait dans la communication présentant sa propre invention (xli), en la comparant à celle d'Amsler (iv). Les types les plus courants sont décrits ci-après.

La théorie est par contre moins évidente intuitivement que la précédente ce qui explique sa découverte tardive. Sa présentation limitée à l'essentiel est donnée chapitre 3, à toutes fins utiles.

Planimètres polaires simples (figure 12)[29]

De ces définitions résulte la forme circulaire de la courbe Γ'. Il est évident que le cercle parcouru par A', entraîné par le mouvement de A, est bien imparfait ; cette imperfection est acceptable selon la théorie montrant que la forme de Γ' est sans effet sur la mesure.

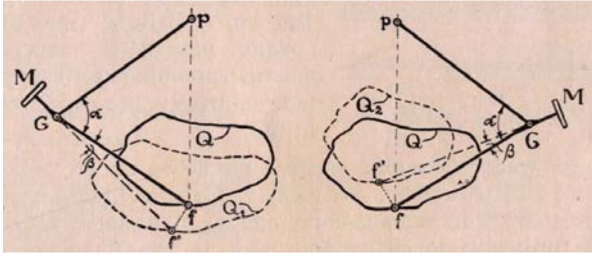
En réalité il n'en est pas tout à fait ainsi : l'arc sur Γ' est parcouru au moins deux fois dans de nombreux cas et il est indispensable que le retour coïncide avec l'aller. Dans le cas contraire, l'erreur ainsi commise est l'aire supplémentaire ajoutée



12 : Planimètre polaire Amsler, vers 1877, coll. SS n°340.

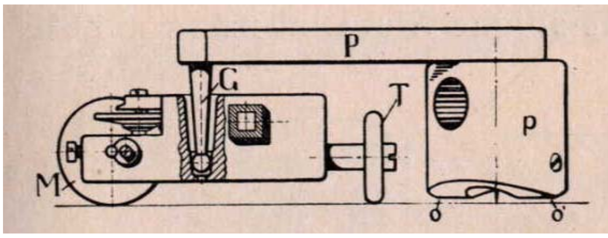
28 Dans une lettre du 3 juillet 2002, J. Fischer indique qu'il existe une publication concernant cet appareil.

29 Laboulaye, 1864, xxxiv.



13 : *principe du planimètre compensateur (extrait de li, p.3 en conservant les notations de cet ouvrage) ; Γ est en trait plein ; les tracés en pointillés sont les « visions » de Γ par le planimètre en raison de l'obliquité de son bras traceur, dans les deux configurations de mesurages symétriques ; ces deux « visions » encadrent le tracé réel et se compensent mutuellement dans leur moyenne.*

par le dédoublement de l'arc parcouru sur Γ'. Toutefois, comme dans tous les mesurages, les erreurs sont inévitables et il est important d'approcher, par des opérations répétées, la valeur recherchée et l'ordre de grandeur de l'erreur commise. Ces erreurs sont commises en partie par l'opérateur lui même dans ses manipulations et ses observations, en partie en raison de la morphologie de l'instrument. Les erreurs dues à l'opérateur sont généralement évaluées en répétant les mesures, en prenant leur moyenne et en évaluant si possible un écart probable de part et d'autre de cette moyenne ; on suppose que ce procédé compense au moins partiellement les maladresses de manipulation et d'observation et que la valeur vraie recherchée se situe dans l'intervalle ainsi calculé. Toutefois cela ne suffit pas à compenser les erreurs dues aux imperfections morphologiques de l'instrument s'il est toujours utilisé de la même manière : les erreurs sont alors probablement commises dans le même sens ; ce fut le cas de nombreux planimètres polaires, parmi les premiers.



14 : *Assemblage du bras polaire dans un planimètre compensateur (extrait de li. Le pôle A'' du bras A''A' est un stylet ; sa pointe fixe est son centre de rotation. A' est un axe d'assemblage ou une rotule destinée à reposer sur le fond d'une cuvette sur le bras porteur.*

Planimètres compensateurs

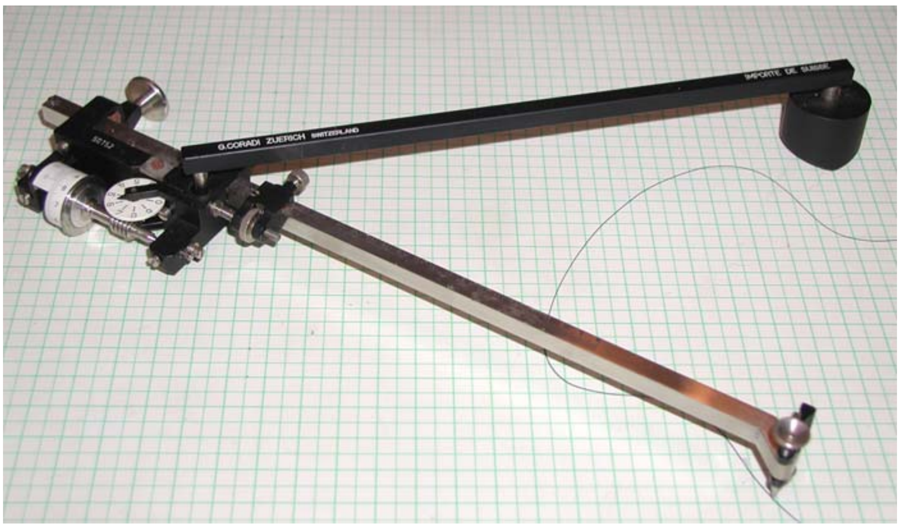
Les planimètres polaires compensateurs sont conçus de manière à ce que le bras traceur et porteur puisse passer aisément sous le bras polaire. Dans ce cas, l'opérateur peut répéter ses mesures en alternant les deux configurations symétriques possibles de l'instrument ; ce procédé compense notablement les erreurs dues aux imperfections morphologiques de l'instrument, principalement l'obliquité de l'axe de la roulette par rapport au bras porteur (figure 13). Pour s'en convaincre, il suffit d'utiliser le planimètre avec la réglette de contrôle, si celle ci existe ; cette réglette, en fait un compas plat, permet d'utiliser le planimètre en faisant parcourir au traceur A une circonférence dont l'aire X est connue avec une bonne précision ; si l'instrument est conservé scrupuleusement et manipulé soigneusement dans les deux mesurages symétriques, on relève le plus souvent deux mesures encadrant X.

A cette fin, le bras polaire est articulé sur le bras porteur, sur lequel il s'appuie, grâce à une petite rotule. Il faut alors assurer la stabilité de l'ensemble par un roulette fixée latéralement sur le bras porteur ; cette roulette n'est qu'un point d'appui.

Planimètres polaires, rappel historique sommaire

Ce bref rappel, comme le précédent, est évidemment incomplet[30]. Son originalité est d'avoir été publié par l'un des acteurs de cette histoire : le constructeur Ott (li) :

> *C'est en 1854 que le planimètre polaire fut imaginé par Jacob Amsler* (iv)*, Professeur au Lycée de Schaffhouse (Suisse) et introduit sur le marché sous la désignation de Type Amsler et sous une forme déjà excellente pour l'époque.*



15 : *Planimètre polaire compensateurCoradi, 1959, coll. SS n°157*

30 Galle, 1912, (xx) donne des références historiques détaillées accompagnées d'un abondante bibliographie. Le Deutsches Museum, à Munich, présente le planimètre polaire n°5 d'Amsler, cité comme le plus ancien connu (xlii, photogr. p.126).

En 1855, et tout à fait indépendamment de ce qui précède, le Professeur A. Miller-Hauenfels de l'Académie des mines de Leoben (Autriche) réalisa également un planimètre polaire et en confia l'exécution aux Ateliers bien connus : Starke & Kammerer à Vienne. Ce planimètre de Miller était, comme cela ressort du brevet pris par l'inventeur en 1855 et d'une communication que fit à ce sujet en 1866 le Professeur Schell, ce qu'on nomme un planimètre compensateur, c'est-à-dire un appareil avec lequel l'influence d'une erreur due à l'instrument lui-même peut être compensée par l'emploi d'un procédé de mesure particulier. Fait digne de remarque, cette qualité essentielle demeura inappréciée et tomba en oubli, à tel point que le géomètre allemand O. Lang dut la découvrir de nouveau plus tard.

Albert Ott et Gottlieb Coradi, anciens collaborateurs de la firme sus-nommée Starke & Kammerer, s'associèrent à Kempten en 1874 sous le nom « Ott et Coradi » et s'adonnèrent de suite à la fabrication des planimètres comme spécialité. Ils réussirent bientôt à apporter à ces appareils des améliorations essentielles et à attirer sur eux l'attention du monde scientifique.

Les demandes croissant sans cesse, la Firme A. Ott (Coradi s'en était séparé en 1880) put augmenter de plus en plus sa capacité de production dans cette fabrication des planimètres et amener ces instruments à une grande perfection technique.

Il est intéressant par les publications, notamment les catalogues de fournisseurs, de suivre la diffusion rapide de cet instrument dans le monde. Un catalogue de 1867 de la firme William Mc Allister propose le planimètre Amsler aux USA accompagné d'un intéressant mode d'emploi[31].

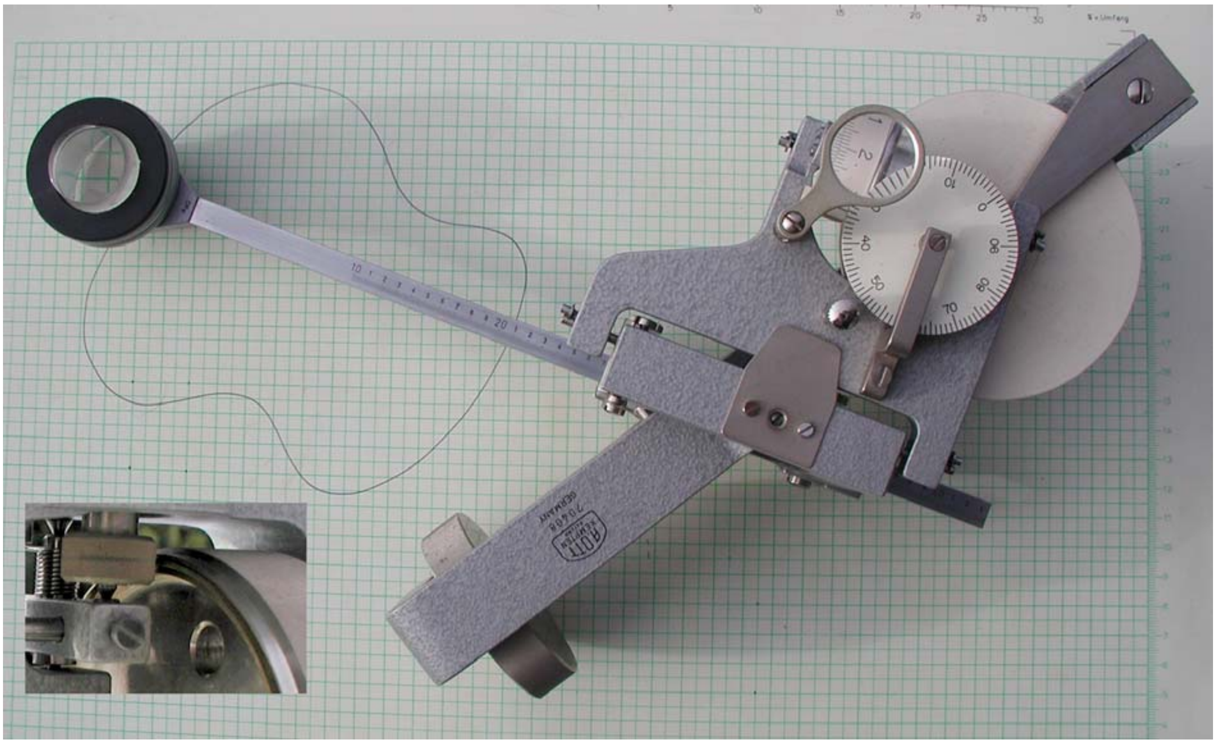
Exemples

Planimètre polaire Amsler (figure 12, iv)

Bien que non signé, ce planimètre est reconnu comme produit par Amsler, vraisemblablement vers 1877[32]. Ce planimètre n'est pas compensateur.

Planimètre polaire compensateur Coradi (figure 15)

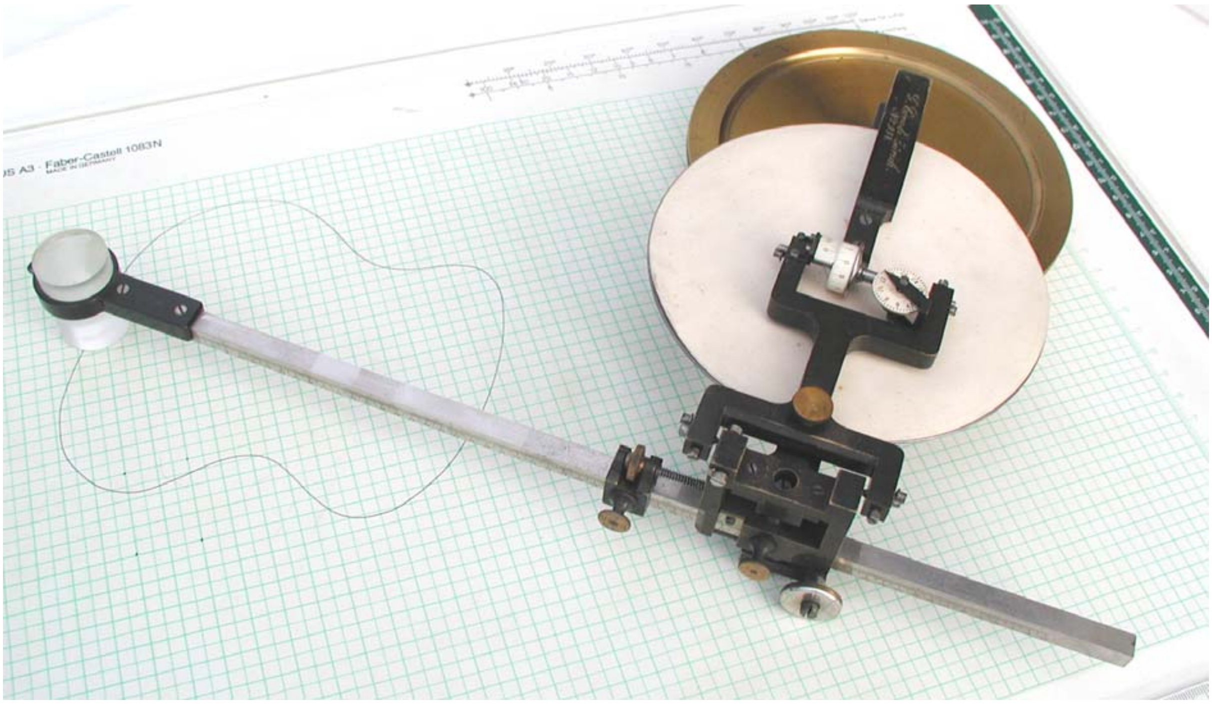
Ce planimètre est typiquement de type polaire et compensateur : le bras porteur se déplaçant sans gêne <u>sous</u> le bras polaire, les mesures en sens opposés sont possibles dans tous les cas. Il fut produit vers 1959 peu de



16 : Planimètre linéaire à Disque Ott, coll. SS. n°327.

temps avant l'apparition de coordinatographes couplés avec un ordinateur ; rappelons à ce sujet qu'existent des

31 Allister, 1867, ii, pp.9/11.



17 : Grand planimètre polaire à disque - coll. SS, n°480

logiciels pour intégrer des fonctions définies par points et que le nombre de points relevés par un coordinatographe peut être très élevé.

Planimètre polaire à disque Coradi (figure 17)

Fabriqué par Coradi en 1895 il fut utilisé au moins jusqu'en 1931 ainsi qu'en témoignent les notes successives de révisions et d'étalonnages. La loupe est probablement un ajout tardif, datant peut-être de la dernière révision[32] ; grâce à son réticule, cette loupe permet incontestablement de suivre le tracé de toute patatoïde sans s'en écarter. H. de Morin décrit la cinématique de ce type d'instrument en détail (xlvi, pp.29/34), justifiant par le calcul l'intérêt du disque tournant pour la précision des mesures.

Planimètre linéaire

La courbe Γ' est une droite. Cette disposition est obtenue mécaniquement, soit par une glissière soit par un chariot équipé de roues larges dont la surface de roulement rugueuse évite, en principe, tout écart latéral ou en rotation. De même que les planimètres polaires, ces instruments sont parfois dotés d'un disque tournant entraîné lors du déplacement longitudinal, afin d'améliorer la précision des mesures, la sensibilité de l'instrument étant améliorée.

Exemple

Planimètre linéaire à disque Ott (figure 16)[33]

Ce planimètre fut livré en 1958 par la maison Wild au Service de Chimie du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées à Paris[34]. Il est donc de fabrication récente et fut supplanté une vingtaine d'années plus tard par un coordinatographe couplé à un ordinateur. La vue de détail montre le système d'entraînement du disque formé d'une petite molette couplée par friction à la jante de l'une des roues ; ces éléments sont cachés par le disque tournant dans la vue d'ensemble.

Une version ancienne de ce planimètre figure dans le catalogue Ott, catalogue non daté mais probablement du début du XX^{e} siècle (li, pp.17/18).

Variantes constructives

Bien d'autres conceptions originales existent dont la présentation exhaustive est malheureusement incompatible avec le cadre restreint de cette monographie. Une telle présentation est donnée par H. de Morin (xlvi) et, plus tardivement, par L. A. Ott (lii).

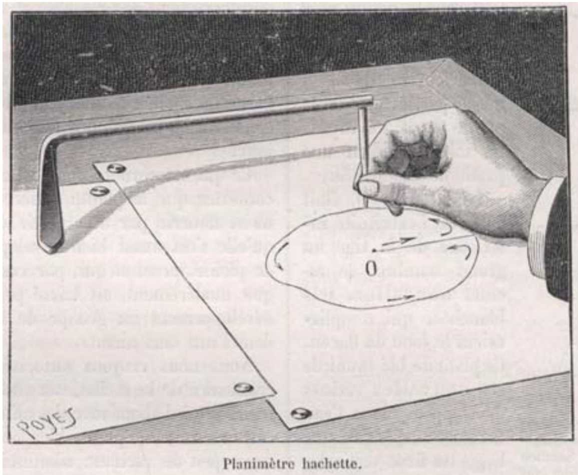
32 Avis du professeur Dr Joachim Fisher, Berlin. J. Fisher, historien des sciences gère une base de données concernant les planimètres et ouvrages sur ce sujet, conservés dans différentes collections publiques ou privées du monde entier. C'est un expert remarquable qu'il convient de consulter pour identifier et dater un objet peu loquace.

33 Cet instrument est décrit par H. de Morin dans son ancienne version (xlvi).

34 Ce planimètre fut utilisé pour l'étude de coupes de matériaux.

Il est par contre indispensable de signaler que les planimètres polaires et linéaires les plus répandus furent l'objet de nombreuses améliorations destinées à en accroître la stabilité durant les mesures, la sensibilité et la précision, enfin xvil'adéquation à différentes situations de mesurage.

Énumérer toutes ces adaptations est également hors du cadre de cette monographie. Il convient néanmoins de mentionner l'usage surfaces de révolutions tournantes, en particulier des disques, sur lesquelles évolue la roulette intégrante, ce qui augmente la sensibilité, la précision et la fidélité de l'instrument ; le disque joue le rôle d'un amplificateur de la rotation de la roulette intégrante. Ces appareils, malgré les apparences, ne doivent pas être confondus avec les planimètres de la première famille qui possèdent également une surface de roulement.



19 : Planimètre de Prytz (xvi, p.140, voir également le site Internet).

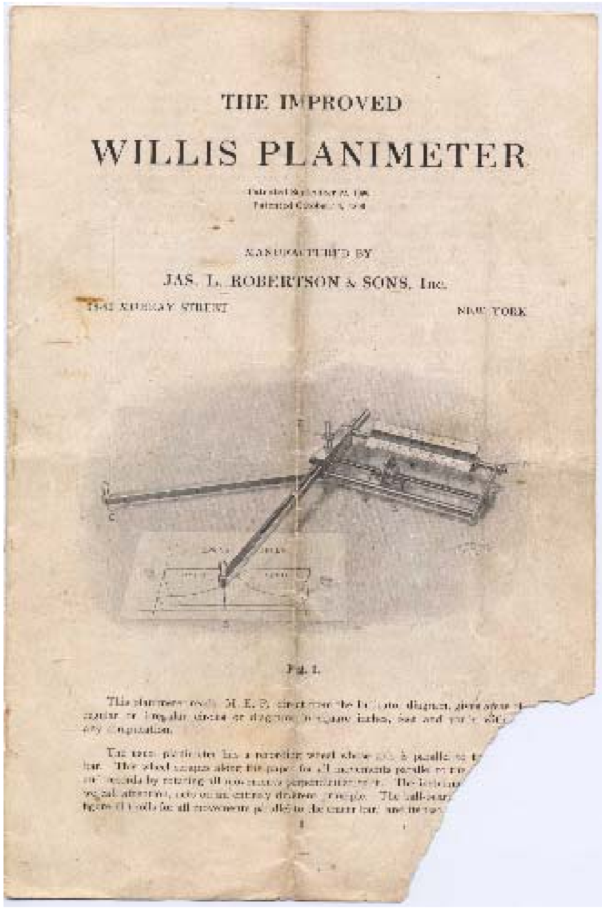
Planimètres atypiques

Planimètre de Prytz (xvi)

C'est un cas particulier de planimètre à bras porteur de longueur constante. Sa construction est extrêmement simple : l'instrument est limité au bras porteur car son principe est subtil. La précision des résultats est faible mais si le but recherché est peu exigeant à ce propos, cet instrument très économique est incontestablement pratique. Il n'en subsiste que peu d'exemplaires. Bien que peu répandu ce planimètre mérite d'être mentionné en raison de sa profonde originalité.

Le bras porteur A'A est astreint à rester tangent à la courbe Γ'. A cet effet, l'extrémité A' est dotée d'une petite lame suffisamment tranchante, ou hachette, pour s'incruster dans le papier, interdisant ainsi tout déplacement latéral… sans découper le support ! Lorsque A se déplace sur Γ, la lame n'autorise donc qu'un déplacement axial selon A'A et une rotation infinitésimale autour de A' mais aucun déplacement latéral. A' engendre donc durant son déplacement une courbe Γ' dont A'A est toujours la tangente.

Lorsque A revient à son point de départ, A' a évolué sur un arc d'extrémités A'_i et A'_f. A'_i et A'_f sont également les extrémités d'un arc de cercle de centre A dont l'ouverture angulaire φ détermine la rotation de toute roulette qui aurait été attachée à ce bras. Cette ouverture étant simplement mesurable à l'aide d'un rapporteur à la fin du parcours, la roulette devient inutile. En outre, une démonstration qui n'est pas reproduite dans cette monographie montre qu'à un facteur de proportionnalité près, l'aire de Γ est égale à $(A'A)^2\varphi$. Si l'arc $A'_iA'_f$ est assimilé à sa corde, alors l'expression se réduit à : $\text{aire}(\Gamma) = A'_iA'_f \times A'A$.


THE IMPROVED

WILLIS PLANIMETER

MANUFACTURED BY

JAS. L. ROBERTSON & SONS, Inc.

NEW YORK

Fig. 1.

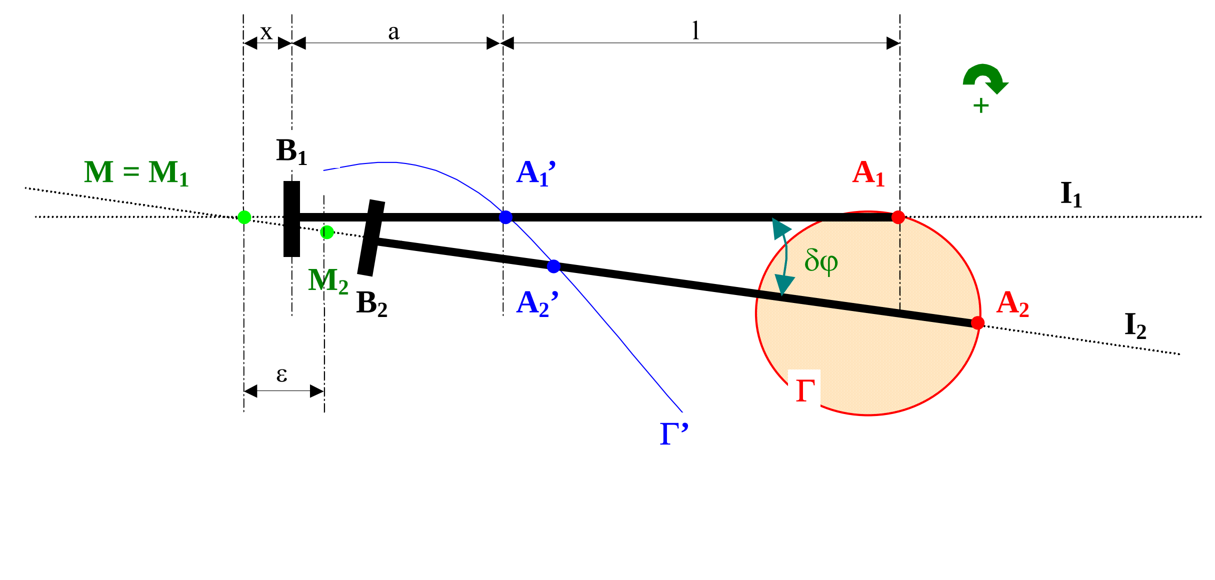
18 : Planimètre de Willis, Coll. SS n°494, documentation de l'instrument.

La théorie complète de cet instrument est donnée par Meyer[35] (xliii, pp.268/270), H. de Morin (xlvi, pp.42/50).

Planimètre de Willis

Ce planimètre possède un bras porteur et un bras polaire (l, p.59). La roulette associée au bras porteur a son axe perpendiculaire à ce dernier et se déplace librement le long de son axe devant une réglette graduée. Sa circonférence étant une arrête vive, cette roulette n'est donc pas dérapante : tout déplacement latéral infinitésimal du bras porteur provoque un déplacement relatif opposé de la roulette sur son axe ; la rotation n'est pas enregis-

35 Noms en allemand : Schneidenplanimeter, Beilplanimeter.



20 : Déplacement infinitésimal du bras porteur ; les valeurs ε et δφ sont considérablement amplifiées.

trée. Le déplacement latéral total de la roulette mesuré sur la règle donne la valeur de l'aire de la courbe parcourue.

La théorie est sommairement présentée par son auteur dans le brevet, lequel est consultable via Internet[36].

3 ÉLÉMENTS THÉORIQUES ABRÉGÉS CONCERNANT LES PLANIMÈTRES POLAIRES

La démonstration suivante est établie sur des éléments de figures pour lesquels sont imposées dans cette note des restrictions de forme et de situation ; la démonstration ainsi limitée à un cas simple mais courant de mesurage gagne en rapidité mais perd en généralité[37]. Toutefois le but recherché dans cette note est de montrer comment une telle démonstration peut être conduite ; l'examen des différents cas possibles est effectué par H. de Morin (xlvi), également par A. Favaro[38].

Hypothèses

Nous définissons dans un plan orienté, trois éléments :

une courbe Γ fermée enfermant une aire dont la surface doit être mesurée,
une courbe Γ' auxiliaire quelconque,
un segment A'A orienté de longueur constante l, A appartenant à Γ, A' à Γ'.

Une condition absolue est imposée : si A parcours continûment Γ dans sa totalité à partir d'un point de départ pour y revenir, alors A' parcours continûment un arc de Γ' depuis un point de départ pour y revenir.

Les conditions restrictives sont :

α) Γ ne possède aucun point d'inflexion ou de rebroussement, sa concavité est donc toujours orientée vers l'intérieur.
β) Γ et Γ' sont totalement extérieures l'une de l'autre[41],
γ) Γ' ne possède aucun point d'inflexion ou de rebroussement et sa convexité est orientée vers Γ. Cette condition est importante car elle implique qu'à la fin du parcours de Γ, A'A revient à sa position initiale.

Démonstration

Soient :

A_i (i=1, 2, etc.) un point quelconque de repérant une position quelconque du traceur A sur la courbe Γ, A'_i un point de Γ' correspondant à l'une des positions possibles du traceur A' sur Γ, B_i, le point de contact de la roulette correspondant à A_i et A'_i sur le plan des courbes précitées.

Selon les paramètres constructifs de l'instrument :

$A_i'A_i = l$

36 Patent 11568 RE, du 22 septembre 1896.
37 Par exemple nous ignorons les cas où Γ' est un cercle intérieur à Γ ; voir l'esquisse de discussion de la note 41, page 3.
38 Favaro, 1885, xviii, chap. XII, pp.353/366.

$B_iA_i' = a$

Tout déplacement infinitésimal de A_1 en A_2 entraîne une rotation infinitésimale, de valeur signée $\delta\varphi$, de la barre A'A. L'axe I de A'A dans sa position finale I_2 coupe sa position initiale I_1 en un point M_1 ; M_1 se déplace d'une valeur infinitésimale ε en M_2. M_1 et M_2 sont portés tous deux par I_2.

Posons :

$M_1B_1 = x$

Dans son déplacement, A'A balaye une surface $A_1'A_1A_2A_2'$ d'aire infinitésimale :

$\delta S = \text{aire}\,(A_1'A_1A_2A_2') = \text{aire}\,(M_1A_1A_2) - \text{aire}\,(M_1A_1'A_2')$

Dans les calculs suivants, nous négligeons les infiniment petits du second ordre ou d'ordre supérieur : $\varepsilon\,\delta\varphi$, $\varepsilon^2\,\delta\varphi$, $\delta\varphi^2$, etc.

$$\text{aire}\,(M_1A_1A_2) = MA_1\,MA_2\,\frac{\sin(\delta\varphi)}{2} \cong MA_1\,MA_2\,\frac{\delta\varphi}{2}$$

$MA_1 = x+a+l$

$MA_2 = x+\varepsilon+a+l$

$$\text{aire}\,(M_1A_1A_2) \cong (x+a+l)(x+\varepsilon+a+l)\,\frac{\delta\varphi}{2} = \left((x+a+l)^2+(x+a+l)\varepsilon\right)\frac{\delta\varphi}{2}$$

$$\text{aire}\,(M_1A_1A_2) \cong (x+a+l)^2\,\frac{\delta\varphi}{2}$$

De façon similaire :

$$\text{aire}\,(M_1A'_1A'_2) \cong (x+a)^2\,\frac{\delta\varphi}{2}$$

Finalement :

$$\delta S \cong \left((x+a+l)^2-(x+a)^2\right)\frac{\delta\varphi}{2} = \left(l+2(x+a)\right)\,l\,\frac{\delta\varphi}{2}$$

$$\delta S \cong (l^2+2al)\,\frac{\delta\varphi}{2} + x\,l\,\delta\varphi$$

La valeur de S résulte de l'intégration de l'expression ci dessus pour A évoluant d'un position initiale A_i à une position finale A_f ; consécutivement φ varie d'une valeur initiale φ_i à une valeur finale φ_f. L'intégration du premier terme est immédiate, celle du second est impossible analytiquement puisque x est une fonction inconnue de la position de A :

$$S \cong (l^2+2al)\,\frac{(\varphi_f-\varphi_i)}{2} + l\int_\Gamma x\delta\varphi$$

Dans le cas d'une courbe Γ fermée, A décrit toute la courbe Γ ; dans ces conditions, $\varphi_f = \varphi_i$ et le premier terme de la somme ci dessus est nul.

Remarquons maintenant que $x\,\delta\varphi$ est le déplacement infinitésimal de B, point de contact de la roulette avec le plan de Γ[39] ; si ρ est le rayon de cette roulette, à tout déplacement infinitésimal de B correspond une rotation infinitésimale δθ de la roulette telle que :

$$x\,\delta\varphi = \rho\,\delta\theta$$

θ_i et θ_f étant les angles indiqués par la graduation de la roulette, correspondant respectivement au début et à la fin du parcours de A sur Γ, la mesure recherchée est donc, à un facteur de proportionnalité k près défini par un étalonnage préalable :

$$S = k\,\rho\,l\,(\theta_f - \theta_i)$$

Or, S est l'aire de la surface balayée par A'A dans ses déplacements. A'A balaie une seule fois l'intérieur de Γ ; il balaie deux fois[40], en sens opposés, la surface entre Γ, Γ' et l'enveloppe des positions extrê-

39 Il existe des planimètres travaillant sur des surfaces cylindriques, d'autres sur des surfaces sphériques.

40 Si Γ présente des points d'inflexion ou de rebroussement la discussion sur le balayage se complique ; nous avons préféré l'éviter ici.

mes de A'A, ce qui annule la mesure pour cette partie de la surface totale balayée[41]. Il résulte donc que S est la mesure de l'aire de Γ.

Discussion

La démonstration utilise les notations de la géométrie cartésienne classique. Les hypothèses proposées sont restrictives mais permettent une démonstration simple applicable aux cas courants d'utilisation du planimètre. Plus de généralité avec les notations utilisées nécessiterait quelques discussions laborieuses.

21 : Toujours fabriqués… Ici un planimètre Lasico,(l, p.59).

Le mathématicien doit utiliser des théories plus fortes s'il veut généraliser tout en restant concis. Utilisant la théorie des espaces vectoriels, la démonstration précédente est effectivement généralisable et son résultat apparaît comme une application de la formule de Green[10, 42, 43]. C'est une belle démonstration pour des lecteurs puristes mais avertis ; elle est éventuellement innovante pour la conception des logiciels équipant les planimètres modernes.

Néanmoins, les cheminements sont multiples et il convient de citer le raisonnement joliment exemplaire de simplicité d'Harald Hanche-Olsen, produisanr rapidement le résultat cherché en utilisant astucieusement les notations du plan complexe[44].

4 CONCLUSION

Les techniques modernes de traitement de l'information ont évidemment profondément modifié la conception et l'usage des instruments d'intégration. Cette constatation est bien exprimée par cet emprunt au rapport d'une Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (xii)[45] :

Nous avons évoqué dans les paragraphes précédents le rôle du développement des technologies informatiques sur le calcul et, à travers le calcul, sur les mathématiques elles-mêmes. De tout temps, l'élaboration des concepts mathématiques a dépendu des instruments matériels et symboliques du calcul. Nous avons déjà évoqué dans ce rapport les évolutions permises par l'adoption de la numération arabe et du système décimal, par la mise en place de l'écriture symbolique algébrique, on ne saurait non plus oublier les évolutions permises par l'invention des logarithmes, ni le rôle joué par les tabulations de fonctions dans le développement de l'analyse. On ne saurait également oublier les instruments tant mécaniques (appareils pour tracer des courbes, résoudre des équations, planimètres, intégraphes…) que graphiques dont s'est doté le calcul (abaques, nomogrammes…), ni bien sûr la règle à calcul, matérialisation graphique des tables de logarithmes[46]. Ces instruments ont eu une importance considérable pour les scientifiques et les ingénieurs jusque dans les années 70, et l'apprentissage était pris et est toujours pris en charge, pour certains d'entre eux, notamment les abaques, par l'enseignement technique.

Mais aujourd'hui, c'est à travers le développement d'outils logiciels que s'effectue essentiellement l'instrumentation du calcul. L'activité mathématique est, de plus en plus, pour le professionnel, une activité assistée par des outils de calcul scientifique, qu'il s'agisse d'outils à vocation généraliste de calcul numérique et/ou formel ou d'instruments spécifiques à tel ou tel type de travail mathématique, comme par exemple les logiciels statistiques. Le développement de ces instruments façonne à son tour le rapport au calcul du monde mathématique, en modifiant substantiellement

---

41 Exemple de discussion pour la généralisation de la démonstration : revenant sur la condition β, Γ' totalement intérieure à Γ est aussi une configuration de travail possible ; dans le cas d'un planimètre polaire cela revient à placer le pôle à l'intérieur de Γ en supposant que le bras polaire reste également à l'intérieur de Γ ; dans ce cas il faut ajouter au résultat fourni par le planimètre l'aire du cercle Γ'.

42 Grothmann, xxv.

43 Gatterdam, xxi[cité par Knill, xxxi] ; Knill, xxxi ; Ascoli, v. ce dernier est cité par Knill comme le premier possible à avoir utilisé cette démarche.

44 Hanche-Olsen, xxvii.

45 Deux paragraphes sont reproduits fidèlement, seuls la numérotation de la référence bibliographique (ci-après) et la forme de cette référence ont été adaptées à la présentation de nos propres notes de bas de page.

46 Pour une histoire du calcul graphique, consulter : Tournès, lviii.

les pratiques et stratégies de calcul, en renforçant les approches algorithmiques et constructives, en conduisant au développement de nouvelles théories comme celle de la complexité. Ce n'est pas un hasard si le calcul scientifique apparaît aujourd'hui comme une spécialité mathématique à part entière.

Pour ce qui concerne les planimètres, le rôle de la roulette intégrante est désormais effectivement dévolu à du logiciel ; diverses solutions sont alors possibles allant de l'usage classique d'un ordinateur quelconque auquel on communique les coordonnées des points de la courbe, lues par un capteur adéquat, jusqu'à l'insertion d'un micro-système informatique dans l'appareil lui-même[47]. C'est ainsi que le planimètre figure encore et toujours dans les catalogues de fabricants d'instruments, notamment pour la topographie ou l'architecture (liii).

5 BIBLIOGRAPHIE

Les documents, originaux ou copies, suivants sont présents pour la plupart dans la bibliothèque de l'auteur et celle de Jean René Berland ; les exceptions sont signalées par (*) ou une note de bas de page ; dans ce cas, les notices reproduisent aussi fidèlement que possible celles des sources ; ces notices sont parfois incomplètes, ce qui rend malaisée la recherche des documents cités. Il existe par ailleurs des sites WEB sur ce sujet dont certains furent consultés. Les moteurs « Google » et « Yahoo » (mondial) interrogés avec les mots clés « planimeter » et « museum » communiquent de nombreuses adresses correspondant à des collections publiques et privées. Certains textes ainsi consultés sont immédaitement transférables en mémoire sur le site personnel ; leurs références en bibliographie indiquent cette origine.

i **Abdank-Abakanowicz**. Les intégraphes, la courbe intégrale et ses applications. Paris, 1886. [cité dans : xx, traduction allemande de 1889 citée dans :xliii] (*)

ii [**Allister** William Y. Mc]. Priced and Illustrated Catalogue of Mathematical Instruments, … Philadelphia, 1867. 46p. (*)

iii **Amsler**. Momentenplanimeter. Vierteljahrschrift der naturforschenden Gesellschaft. Zürich, Bd.1, 1856. [cité dans : xx] (*).

iv **Amsler**. Ueber die mechanische Bestimmung des Flächehinalts ebener Figuren. Schaffhausen, 1856.. Schweitz. Vierteljahrschrift, 1856. [cité dans xxvi, considéré comme le premier texte sur le planimètre polaire] (*)[48].

v **Ascoli** (Guido). Vedute sintetiche sugli strumenti integratori. (italian). *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, 18:36, 1947. [cité par Knill, xxxi]

vi **Baxandall** (D.). Calculating Machines and Instruments. Catalogue of the collections in the Science Museum. Originally compiled by D. Baxandall ARCS FRAS. Revised & updated by Jane Pugh BSC ARCS. Science Museum, London, 1975. ISBN 0 901805 14 9. viiip., 102p., photogr.

vii **Bouvier** (Alain), **George** (Michel). Sous la direction de François Le Lionnais. Dictionnaire de mathématiques. Presses Universitaires de France. ISBN 2 13 0447066. xivp., 834p.

viii **Burmester** (Dr. L.). Integraph. *in* : Lexikon der gesamten Technik und ihrer Hilfswissenschaften. V. Band. Grundwasser bis Kupplungen. Stuttgart und Leipzig, Deutsche Verlags-Anstalt, sd. pp.305/306.

ix **Coriolis** (G.). Bull. de la Société d'Encouragement, 1829, p.477(*)[49].

x **Coriolis** (G.). Sur un moyen de tracer des courbes données par des équations différentielles. *in* : Journal de Mathématiques pures et appliquées, pp.5/9, 1836 (Copie obtenue dans Gallica, site Internet de la Bibliothèque Nationale).

xi [**Conservatoire National des Arts et Métiers**]. Catalogue. 135p., illustration, additif dactylographié. Paris, CNAM, 1942. (copie).

xii [**Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques**]. Rapport d'étape sur le calcul. slnd (document provenant vraisemblablement de la Commission « Kahane », Université de Toulouse, mais obtenu sur Internet sans référence).

xiii **Culmann**. Die graphische Statik. N° 26, 27. Zürich, 1875(*)[50].

xiv [**Deutsches Museum**]. **Laskow** (Benno), **Hofmann** (Gustav), **Barkemeyer** (Joh., Bernhard). Deutsches Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik. Amtlicher Führer durch die Sammlungen mit 128 Abbildungen und 7 Plänen… Knorr & Hirth, G. M. B. H, München, 1925. 360 p., 90 p.

xv [**Encyclopædia Britannica, Inc.**]. Encyclopædia Britannica. Volume 14. Lighting to Maximilian. William Benton publisher. Enc. Brit. Inc., Chicago, London, … 1970. 1140p. (maj. : 971118).

xvi **E.H**. Un planimètre économique, Le planimètre Hachette de M. le Capitaine H. Prytz. *in* : La Nature, 22e année, 2e semestre, n°1104, 28 juillet 1894. pp.139/140.

47 Ott, liii, p.174, p.175.
48 Cité par Favaro, 1885, xviii, p.355.
49 Cité par Favaro, 1885, xviii, p.354.
50 Cité par Favaro, 1885, xviii, p.353.

xvii **Favaro** (Antonio). Beiträge zur Geschichte der Planimeter. Wien, R.V. Waldheim, 1873(*)[48].

xviii **Favaro** (Antonio). Leçons de statique graphique. Traduit… par Paul Terrier. Première partie, Calcul graphique. Paris, Gauthier-Villars, 1885. vip., 411p.

xix **Fischer (J.).** Instrumente zur Mechanischen Integration. in: H.-W. Schütt, B. Weiss (Hrsg.): Brückenschläge - 25 Jahre Lehrstuhl für Geschichte der exakten Wissenschaften und der Technik an der Technischen Universität Berlin 1969-1994, Berlin 1995, 111-156. (*)

xx **Galle** (Prof. Dr. A.). Mathematische Instrumente. Mathematisch Physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende herausgegeben von E. Jahnke. Leipzig und Berlin, Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1912. vi p., 192 p.

xxi **Gatterdam** (R.W). The planimeter as an example of green's theorem. *American Mathematical Monthly*, 88:701-704, 1981. [cité par Knill, xxxi]

xxii [**Génie Civil**]. Les intégraphes électromagnétiques du Massachussetts Institute of Technology, à Boston (E.-U.). [Fourmarier, Bull. de la Soc. franç. des électr., janv. 1932.]. *in* : Le Génie Civil, 52e ann., t.C, 1er sem., n°2594, 30 avr. 1932. p.455.

xxiii [**Gonella** (Tito)]. Teoria e descrizione d'una macchina colla quale si quadrano le superficie piane (Planimetro Gonella). *in* : Antologia, avril, mai, juin 1825, t.XVIII, Florence, impr. Pezzati(*)[49].

xxiv **Greenhill** (A. G.). Differential and integral calculus with applications. 3d ed. Mac Millan, London, 1896. 456p.

xxv **Grothmann** (René). Der Planimeter. E-Book. Internet, 2003. 8p.

xxvi **Hammer** (Dr. E.). Planimeter. *in* : Lexikon des gesamten Technik und ihrer Hilfswissenschaften. VI. Band. Kupplungen bis Reibung. Stuttgart und Leipzig, Deutsche Verlags-Anstalt, sd. pp.772/778.

xxvii **Hanche-Olsen** (Harald). Differential forms and the polar planimeter. E-Book, sl., 2003. 1p.

xxviii [**Handbook of the Napier Tercentenary Celebration** or…]. Ed. By E.M. Horsburgh. Vol. III in the Charles Babbage Institute reprint series for the History of Computing. Tomash Publishers, Los Angeles, 1982. ISBN 0-938228-10-2. pag. multiple.

xxix **Hirn**. Théorie analytique élémentaire du planimètre Amsler. Paris, 1875(*)[50].

xxx **Jacob** (L.). Le Calcul mécanique. Appareils arithmétiques et algébriques. Intégrateurs. Encyclopédie scientifique publiée sous la direction de Dr. Toulouse. Bibliothèque de mathématiques Appliquées, directeur M. D'Ocagne. Librairie Octave Doin, Gaston Doin, Paris, 1911. xvi p., 412 p., xiip.

xxxi **Knil**l (Oliver). The Planimeter and the Theorem of Green Harvard University, Department of Mathematics. Site WEB, 12 septembre 2000.

xxxii **Laisant**. Note sur le planimètre polaire de M. Amsler. Bordeaux, 1876(*)[50].

xxxiii **Lucas** (Edouard). Le calcul et les machines à calculer. *in* : Association française pour l'avancement des sciences. 13e session. Blois. 1884. Compte rendu de la 13e session. Blois 1884. Première partie. Documents officiels. - Procès-verbaux. Paris, au secrétariat de l'Association, … 1885. pp. 111/141, pl. n° 4.

xxxiv **Laboulaye** (Ch.).. Le Planimètre polaire de M. Amsler (de Schaffhouse). Annales du CIAM, 1e série, tome 5. Paris, Eugène Lacroix, 1864. pp.601/614.

xxxv **Laboulaye** (Ch.). Encyclopédie technologique. Dictionnaire des arts et manufactures, de l'agriculture, des mines etc. Description des procédés de l'industrie française et étrangère par… Troisième édition considérablement augmentée. Deuxième tirage… A-G. Paris, Librairie du Dictionnaire des arts et manufactures, 1873. cahiers (8p.).

xxxvi **Lalanne** (M.). Mémoire sur l'arithmoplanimètre, machine arithmétique et géométrique. Paris, 1840[49].

xxxvii **Lami** (E.-O.). Dictionnaire encyclopédique et biographique de l'industrie et des arts industriels… Tome VII. Librairie des dictionnaires, Paris, 1887. 964p.

xxxviii **Lucas** (Edouard). Le Diagrammomètre du Colonel Kozloff. *in* : La Nature, n°896, 18ème. année, 1890, 2ème. Semestre2 août. 1890. pp.131/134.

xxxix [**Magasin Pittoresque**]. Question de topographie résolue par la balance. Des Planimètres. *in* : Le Magasin Pittoresque, 19e année, n°44, nov. 1851. p.352.

xl **Mathieu** (M.). Rapport fait à la Commission française du jury international de l'Exposition universelle de Londres, sur les instruments de Mathématique et de Physique, etc., Paris, Imprim. Nat., 1855.

xli **Maxwell** (J. C.). Description of a New Form of Platometer, an Instrument for measuring the Areas of Plane Figures drawn on Paper. Maxwell's Collected Papers, v. I, p. 230. 1856 (probable). (*)

xlii **Mayr** (Otto) and others. The Deustches Museum. German Museum of Masterworks of Science and Technology, Munich. Scala Publications Ltd., London, 1990. 160p. ISBN : 1 870248 29 5.

xliii **Meyer zur Capellen** (Dr. -Ing. W.). Mathematische Instrumente. Mit 250 Figuren. Zweite ergänzte Auflage. Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik. Band I. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1944. x p., 313 p.

xliv [**Morin** (H.)]. Catalogue général. Instruments de précision. 22e éd., 1er fascicule. H. Morin, Paris, 1893. 112p.

xlv [**Morin** (H.)]. Catalogue général des fabrications H.Morin, Paris, sd. [>1935]. 176p.

xlvi **Morin** (H. de). Les Appareils d'Intégration. Bibliothèque Générale des Sciences.Paris, Gauthier-Villars, 1913. 208p.

xlvii **Myard** (F.-E.). Nouvelles solutions de calcul grapho-mécanique. Dérivographe et planimètre. *in* : Le Génie Civil, 54e ann., t.CIV, 1er sem., n°2686, 3 févr. 1934. pp.103/106.

xlviii **Nessi** (A.), **Nisolle** (L.). Machine à calculer, au moyen d'un planimètre, l'intégrale du produit de deux fonctions. *in* : Le Génie Civil, 50e ann., t.XCVII, 2e sem., n°2501, 19 juil. 1930. p.69.

xlix **Ocagne** (Maurice d'). Géométrie. Cours de l'Ecole Polytechnique. sl, 1934. pag. multiple.

l **Otnes** (Bob). American Planimeters. in : Journal of the Oughtred Society. Vol. 11, N°2, Fall, 2002. pp.59/64. ISSN 1061-6292.

li [A. **Ott**. Kempten. Allgäu]. Planimètre et pantographes. Tarifs 303 et 403. Ott, slnd. 24p., 14p.

lii **Ott** (L.-A.). Le développement systématique des planimètres et intégrimètres à partir de la forme fondamentale la plus simple. *in* : Le Génie Civil, 57e ann., t.CXI, 2e sem., n°2873, 4 sept. 1937. pp.203/207.

liii [**Ott**]. Zur Geschichte der Mathematischen Instrumente aus der Herstellung der Firma A. Ott, Kempten. *in* : Eine Reise durch Technik und Zeit. 125 Jahre Ott. Ott Messtechnik, Kempten, 1998. pp.159/183.

liv **Peaucelier**. Note sur l'emploi du planimètre polaire de M. Amsler, dans le dessin de la fortification. *in* : Mémorial de l'officier du Génie, n°22, Paris, 1874. pp.134/137(*)[50].

lv **Salomon** (B.). Intégrateurs mécaniques à liaisons holonomes. *in* : Le Génie Civil, 51e ann., t.XCIX, 2e sem., n°2572, 28 nov. 1931. p.559.

lvi **Sydenham** (P. H.). Measuring instruments : tools of knowledge and control. History of technoloy, series 1. Peter peregrinus Ltd., Science Museum, London, 1979. ISBN 0-906048-19-2. xviii p., 512p.

lvii **Tinter** (Wilhelm). Ein Betrag zur Leistungsfähigkeit der in der Praxis hauptsächlich verwendeten Planimeter. Zeicschrift der oesterreichischen Ingenieur- und Architekten- Verins, XXIX, Jahrgang, 1877. pp154/166, 175/192(*)[50].

lviii **Tournès** (D.) Pour une histoire du calcul graphique. *in* : Revue d'Histoire des Mathématiques, vol. 6, 127-161. 2000. (*)