Un intégraphe parmi d'autres…

Serge Savoysky, D ès Sc

1 INTRODUCTION

L'ouvrage d'Abdank-Abakanowicz (i), document incontournable sur le sujet de cette note, décrit la théorie, les diverses cinématiques possibles, enfin les multiples applications d'instruments conçus pour tracer une courbe intégrale d'une courbe donnée : les intégraphes[2]. Nous bénéficions avec cet ouvrage d'un état complet du savoir faire en intégration graphique et mécanique, à la fin du XIXe siècle.

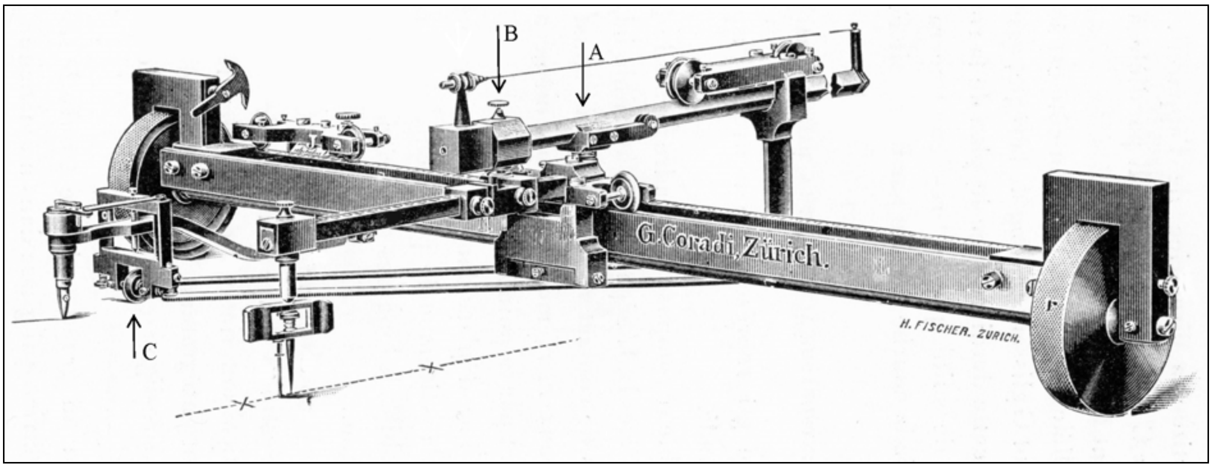

Figure 1 : Intégraphe Coradl n°41[1], système Abdank-Abakanowicz

Nous vivons une époque de « tout numérique ». Est-ce la raison de la pauvreté de nos expositions ou bourses d'échanges en instruments analogiques, voire de leur absence ? En fait ces défauts résultent plus vraisemblablement de leur rareté, due d'abord à leur spécialisation, ensuite à leur ancienneté, enfin leur prix.

Cette note, incursion sommaire dans un passé encore récent, s'appuie sur des documents d'époque[3], dans le simple but d'apporter aux amateurs d'Arts Mécaniques quelques éléments d'information, espérant les seconder lors de leurs recherches de tels instruments.

Considérons une fonction $y = f(x)$ définie pour toutes valeurs de x dans un intervalle $[x1, x2]$ et sa primitive $Y = F(x)$:

(a) $Y = F(x) = \int f(x).dx + k$

k quelconque ; réciproquement :

(b) $dY/dx = y$

La courbe représentative de f(x) est tracée dans un plan cartésien ($\mathfrak{X},\mathfrak{Y}$).

Le but de l'intégraphe, doté d'un curseur P et d'un traceur T qui lui est asservi, consiste <u>théoriquement</u>, en suivant la courbe y=f(x) de tracer une courbe Y=F(x) telle qu'en chaque point x sa pente dY/dx, notée Y', soit égale à y (b).

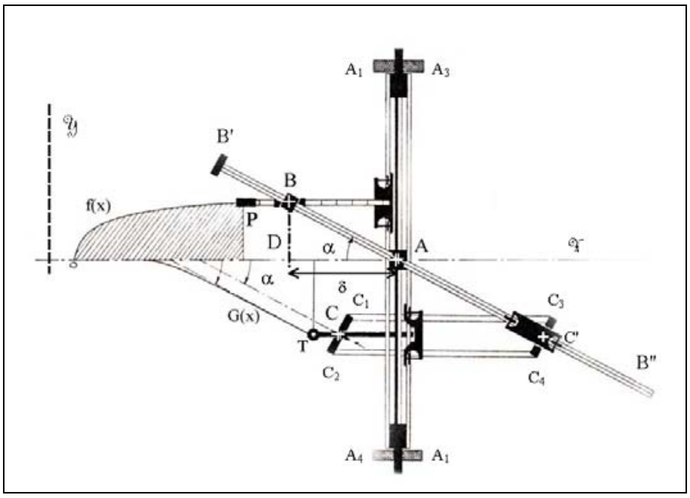

Figure 2 : Schéma de principe de l'instrument d'Abdank-Abakanowicz[4]

1 La gravure (fig.1) illustre un catalogue (iv) de la firme Coradi, de Zürich. L'état de ce vieux catalogue, certainement manipulé à maintes reprises, explique la médiocrité de l'image. Plusieurs ouvrages (ix, xi) contemporains de ce catalogue, étudiant les instruments de mathématique, présentent la même image vraisemblablement communiquée par le constructeur à leurs auteurs. La figure 2 schématise la cinématique de ce type d'instrument. La médiocrité de l'image ainsi que la perspective, masquent des parties de l'instrument et perturbent l'observation d'éléments visibles par ailleurs dans le schéma ; en particulier, les pivots en A et B, articulations essentielles de l'instrument, se distinguent difficilement.

2 Selon l'auteur, « intégrographe » eût été plus respectueux de l'usage établi pour la formation des néologismes, néanmoins tout aussi barbare que « intégraphe ».

3 Collectionner ces documents est aussi passionnant que collectionner les instruments.

4 La figure montre l'un des arrangements apportés à la théorie : l'origine de G(x), courbe effectivement tracée, et celle de f(x) ont des abscisses différentes.

C'est indubitablement un instrument de mathématique que nous pouvons qualifier d'analogique. Cependant, concrètement, sa cinématique et son usage introduisent des arrangements à la théorie, décrits dans la suite de la note ; ils impliquent en fait le tracé, non pas de F(x), mais d'une courbe G(x) déduite de F(x)[4].

C'est enfin un instrument de dessin ; son mode d'emploi diffère de celui du planimètre, instrument de mesure, tout en produisant des résultats de même nature.

Nous avons là une petite merveille dans laquelle l'art du mécanicien rejoint l'imagination du mathématicien.

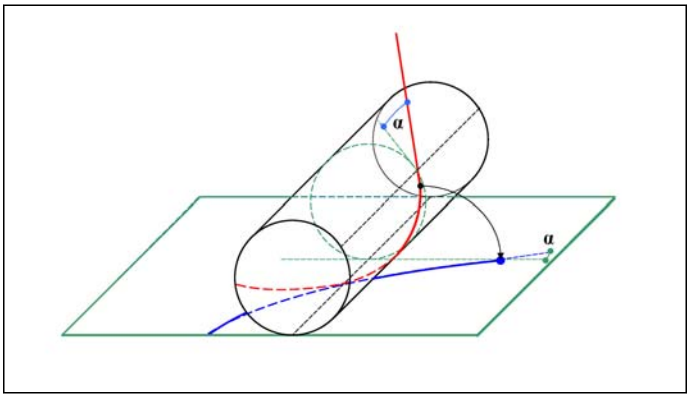

Figure 3 : Schéma de principe de l'idée de Coriolis

Pour apprécier cette symbiose, accordons nous d'abord le temps d'écrire quelques lignes à propos d'un vénérable ancêtre dû à Coriolis ; ensuite nous étudierons particulièrement l'intégraphe[5] imaginé par Abdank-Abakanowicz et fabriqué par Coradi de Zürich (fig.1).

2 Origine, l'ancêtre imaginé par Coriolis

Coriolis[6] proposa en 1836 dans le « Journal de Mathématiques pures et appliquées » (vi) le principe d'un instrument destiné à tracer une courbe Y = F(x) donnée par son équation différentielle (fig.3) :

> *« Si l'on conçoit qu'un fil tendu s'enroule sur un cylindre, et que le frottement y soit assez fort pour empêcher ce fil de glisser le long de la surface contre laquelle il s'est enroulé, la courbe formée par le fil sur la surface du cylindre, développée ensuite sur un plan, jouira de la propriété que la direction de sa tangente sera toujours celle de]a partie du fil tendue en ligne droite avant qu'elle s'enroule. »*
> *« Si donc on peut donner au fil, dans cette partie, une direction qui résulte de l'équation différentiel1e d'une courbe, celle-ci se trouvera tracée sur le cylindre en prenant pour abscisses les arcs comptés sur la base du cylindre. »*

Il reste à construire un mécanisme guidant le fil là où il s'enroule, dans la direction spécifiée par l'équation différentielle. Coriolis proposa plusieurs dispositifs à cet effet, chacun répondant à cette question pour une forme de f(x).

Théoriquement astucieux, l'instrument ne fut pas construit tel que décrit par Coriolis car manifestement susceptible de donner du fil à retordre à son utilisateur[7], mais l'idée ne resta pas lettre morte. Par la suite divers auteurs innovèrent dans la voie ouverte par Coriolis, parmi lesquels Abdank-Abakanowicz.

3 Construction par Coradi de l'instrument d'Abdank-Abakanowicz

Le schéma (fig.2) décrit une manière de transformer l'ordonnée y d'un point sur une courbe f(x) en une pente imposée au tracé d'une courbe, non pas celle, théorique : Y=F(x)+k, mais celle, effective et empreinte des sujétions de la mécanique et du dessin : Z=G(x). L'instrument possède :

- un curseur P pour suivre la courbe y=f(x),
- un traceur T pour dessiner la courbe Z = G(x).

Selon (a) la primitive F(x) est déterminée à une constante près C quelconque ; son tracé est donc déterminé à une translation près dans la direction $\mathcal{Y}$ du plan $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. L'opérateur bénéficie ainsi d'une liberté totale accordée par la théorie pour placer en ordonnée le tracé de Z. Cependant, il peut de plus déplacer Z sans déforma-

5 Une sollicitation pour insérer dans cette note l'image d'un instrument appartenant à une collection publique, semble en raison de l'absence de réponse, soulever quelques difficultés. Dommage… Fort heureusement, les vieux catalogues de la firme Coradi constituent une mine d'illustrations, d'accès manifestement toujours autorisé de tous temps par le constructeur. Merci.

6 Citer Coriolis introduit immédiatement la question de son antériorité. Coriolis aborda vraisemblablement le problème de l'intégration mécanique sur un mode classique bien connu des étudiants et des examinateurs : construire une courbe « telle que… », ici telle que sa pente en chaque point respecte une condition donnée. De ce point de vue, il semble qu'il fut le premier à se l'être posée dans une publication notoirement connue. Ensuite la filiation de toute invention ultérieure à sa proposition reste un sujet de controverse possible, néanmoins exclue de cette présentation car stérile. À ce propos, Abdank-Abakanowicz explique comment il régla une question d'antériorité, soulevée par la présentation de son instrument, directement rapidement et courtoisement, avec un inventeur tout aussi connu que lui : Boys (iii).

7 Coriolis indique (☞ vi, chap.4) qu'il fit construire cet instrument, doté du dispositif nécessaire pour le tracé des exponentielles, en soulignant son utilité pour les calculs d'intérêts. Selon Coriolis : « Le modèle de cette machine fait partie de la collection de l'École Polytechnique. » ; consulté à ce sujet, le service de documentation de l'École, affirme ne plus le posséder. De nouveau, dommage…

tion dans une copie de $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$[8]. Les mécanismes adéquats de positionnement de P et T, pour assurer ces translations, sont observables figure 1, avec beaucoup d'attention toutefois en raison de la qualité médiocre de l'image. Certains instruments offrent en outre la possibilité supplémentaire d'écarter le curseur de son bras porteur, afin d'éviter un chevauchement éventuel des courbes

Dans ces conditions, le mécanisme asservit le traceur T au curseur P, afin de réaliser graphiquement la transformation :

(c) $y = f(x) \rightarrow Z = G(x)$

pour tout x variant continûment de x_1 à x_2.

La cinématique agit selon les deux directions $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ du plan.

Couplage selon $\mathcal{X}$

Un cadre rectangulaire mobile $A_1A_2A_3A_4$, ses côtés A_1A_4 et A_2A_3 perpendiculaires à $\mathcal{X}$, peut se déplacer parallèlement à $\mathcal{X}$, suivant les valeurs successives de l'abscisse ; deux roues aux extrémités assurent ces déplacements ; la forme de leurs bandes de roulement évite les dérapages latéraux. Le curseur P, dont le support roule le long de A_1A_2 qui le guide selon $\mathcal{Y}$, reste toutefois solidaire de ce côté dans tous ses déplacements selon $\mathcal{X}$; de même pour le traceur T dont le support roule sur A_3A_4.

Théoriquement la transformation (a) conserve l'abscisse. Matériellement le mécanisme exécute la transformation (c), en appliquant au résultat une translation, comme indiqué précédemment.

On place alors l'intégraphe sur la feuille portant f(x), en ayant soin de placer A sur $\mathcal{X}$ et de vérifier que les déplacements du cadre s'effectuent correctement dans la direction $\mathcal{X}$.

Couplage en $\mathcal{Y}$

Théoriquement la relation (b) signifie que, pour tout x, l'ordonnée y du point courant de f(x) est la pente Y' au point correspondant de F(x). Or, y et Y'sont des objets mathématiques abstraits ; dans le dessin, l'ordonnée y est une longueur et la pente en T est un rapport[9] de longueurs ; l'intégraphe leur associe ici des dispositifs mécaniques concrets, les matérialisant respectivement.

À cet effet une barre B'B″, nommée directrice (fig.2), assure une liaison entre le cadre, en A, et le bras porteur du curseur en B.

Soit D la projection de B sur $\mathcal{X}$. Dans le triangle rectangle déformable ABD, notons α l'angle de l'hypoténuse AB avec le côté AD et δ la longueur <u>constante</u> de ce côté. L'hypothénuse AB est portée par la directrice. Un axe vertical, solidaire du cadre en A, reçoit un pivot doté d'une glissière. La directrice se déplace librement à travers la glissière du pivot en A et tourne librement avec ce pivot autour de A. Elle est libre en rotation autour d'un axe fixé en B sur le support du curseur P. Dans ces conditions :

(d) $\mathrm{tg}\,\alpha = y/\delta = f(x)/\delta$

tg α est la pente que l'intégraphe doit respecter en traçant Z et La directrice matérialise cette pente.

(e) $dZ/dx = y/\delta$ ou $\delta Z = y.dx/\delta$

donc :

(f) $Z = \int f(x)/\delta\, dx + C = Y/\delta$

G(x) est proportionnelle en ordonnée à F(x) avec un rapport égal à 1/δ.

La cinématique de l'appareil doit enfin réaliser la condition de pente imposée au traceur. Un parallélogramme articulé $C_1C_2C_3C_4$ asservit le traceur T au curseur P ; C_1C_2 et C_3C_4 sont parallèles. Le côté C_3C_4 est perpendiculaire en C' à la directrice sur laquelle il coulisse librement en C'. C_1C_2 est lié en C au support de T[10] en translation mais est libre en rotation autour de C.

Une roulette <u>tranchante</u> est associée au côté C_1C_2. Elle roule sur $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ <u>sans déraper</u> ; son plan est perpendiculaire à C_1C_2 et à C_3C_4 et sa trace sur $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ est donc parallèle à la directrice. Lors de tout mouvement, à tout instant, la roulette tranchante peut pivoter d'un angle infinitésimal sur son point de contact et roule sans dérapage latéral.

---

8 Autrement dit, la théorie permet dans la pratique d'utiliser deux feuilles de dessins séparées.

9 S'agissant d'un rapport, donc sans dimension, cette valeur est indépendante de l'unité de mesure, à la condition évidemment d'éviter la fantaisie de choisir des unités différentes pour chacune des deux longueurs.

10 Malgré les apparences, C1C2 et C3C4, sont séparés du chariot placé au dessus.

Remarquons que ces mouvements provoquent des déplacements en ordonnée du bras porteur de T ; ils sont possibles car :

- ce bras roule librement le long de A_2A_3,
- C' est libre sur la directrice et le triangle ACC' est déformable.

Le traceur reste ainsi assujetti à décrire une courbe continuellement tangente au plan de la roulette donc parallèle à la direction spécifiée par l'angle α. À tout instant de son tracé, Z représente donc la courbe intégrale cherchée, à un facteur de proportionnalité près en ordonnée et après translation.

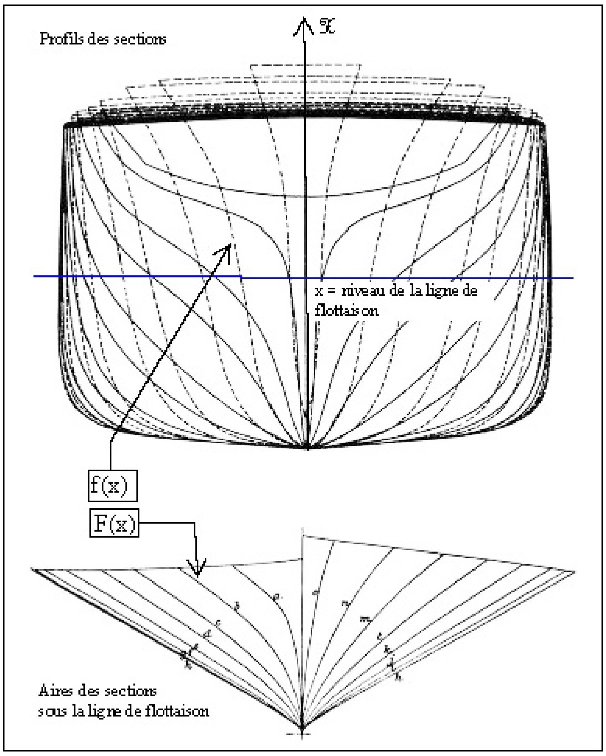

Figure 4 : Architecture navale[11]

4 APPLICATIONS

Un précédent article (xv) montrait la richesse de notre environnement en processus d'intégration, d'abord naturels mais aussi économiques ou scientifiques et industriels. Perfectionner notre connaissance de ces processus constitue un immense champ d'application de la mathématique et suscite la créativité dans son instrumentation.

En particulier, l'invention présentée ici date de la première moitié du XIXe siècle, bien moins équipée que notre époque puissamment servie par les ordinateurs ; notre richesse matérielle fausse notre perception des difficiles conditions de travail de nos prédécesseurs. Bien des calculs restaient hors de portée des personnels attachés à ces taches ; les méthodes graphiques présentaient un intérêt évident car matériellement et économiquement adaptées aux besoins d'alors ; l'usage d'un intégraphe pouvait, éventuellement, amplement suffire à l'exécution de certains calculs d'intégrales.

Lesquels ? Deux exemples apparaissent immédiatement, issus de domaines réputés pour la lourdeur des calculs inhérents à leurs activités.

Un ancêtre en économie

Coriolis nous propose un premier exemple dans l'article même présentant son invention (vi), l'ancêtre des applications de l'intégraphe :

> *« J'ai fait construire, d'après cette remarque, une machine au moyen de laquelle un fil tendu par un léger poids s'enroule ou se déroule autour d'un cylindre en passant par un petit trou percé dans une plaque mobile qu'on approche ou qu'on écarte à volonté du cylindre. Une aiguille et un cadran indiquent les tours et fractions de tours dont on a tourné le cylindre. Ce sont ces quantités qui représentent les exposants. Une échelle placée contre la génératrice du cylindre, sur laquelle se trouve toujours le point où le fil s'en sépare, indique, à partir du zéro de l'échelle, les exponentielles qui répondent aux exposants indiqués sur le cadran. On conçoit comment cette machine opère facilement tous les calculs d'intérêts composés. La marche de l'aiguille répond aux durées des placemens, et les nombres qu'on lit sur l'échelle, au point où le fil se sépare du cylindre, indiquent ce que sont devenues les sommes placées, ou ce qu'elles doivent être pour l'escompte. »*[7]

Construction navale

L'architecture navale nécessite de calculer la poussée hydrostatique exercée sur une coque de forme donnée ; la poussée a pour valeur le poids du volume d'eau déplacé par la partie immergée de la coque. Sans entrer dans le détail, il apparaît clairement qu'un moyen de calculer ce volume est, tout d'abord d'échantillonner en sections la coque, puis de déterminer l'aire de la partie immergée de chaque section, enfin en intégrant ces résultats sur toute la longueur de la construction d'en déduire le volume immergé ; les ouvrages d'architecture navale décrivent les méthodes disponibles pour un tel travail (ii). Indépendamment de la méthode adoptée, l'aire de la partie immergée d'une section quelconque dépend évidemment de la position de la ligne de flottaison. Supposons ici le navire en équilibre ; son plan médian est alors vertical.

11 in : Application of the Integraph to Ship Calculations, (ii, p.229)

Pour chaque section, (fig.4) chacun de ses côtés forme une courbe f(x), l'axe de la section étant considéré comme axe des abscisses ; la courbe intégrale F(x) de f(x), tracée par un intégraphe, donne alors à un facteur multiplicatif près, et pour toute valeur de x marquant la position de la ligne flottaison, l'aire de la partie immergée correspondante. Une seule opération suffit pour toutes les positions alors qu'il en faudrait une pour chacune avec un planimètre.

Dans le cas précédent, le problème consiste à tracer une courbe définie par une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre et à coefficients constants ; il s'agit d'une classe de problèmes relativement simples sachant que la modélisation mathématique propose à la sagacité du calculateur des équations différentielles autrement complexes. Nos anciens progressèrent dans la recherche pour intégrer mécaniquement de telles équations et conçurent des instruments à cet effet : belle mathématique et belles œuvres d'artistes mécaniciens.

Maurice d'Ocagne, l'un des pères du calcul graphique, témoigne de ces prolongations dans le domaine d'application des intégraphes.

Il mentionne ainsi en 1920 l'existence d'un intégraphe pour le tracé de la solution d'une équation linéaire générale du premier ordre (xii) ; il décrit avec précision le mécanisme en 1934 toujours dans le cas général de cette équation (xiii). Le Science Museum de Londres possède un tel intégraphe de 1910 mais pour un cas restreint, permettant de tracer la réponse d'un circuit électrique, pour une sollicitation quelconque (xvi)[12]. On constate, dans les mêmes écrits de Maurice d'Ocagne, une évolution similaire concernant un intégraphe de l'équation du mouvement des projectiles dans l'air[13], équation telle qu'établie et considérée comme valable à cette époque.

Les inventions se multiplièrent dans ce domaine durant ces années ; toutefois s'agissant d'instruments rares, la difficulté pour les décrire aujourd'hui est de les trouver… En outre l'émergence puis le développement rapide du calcul électronique les condamnèrent dans la seconde moitié du XXe siècle. Il reste donc un siècle et demi d'histoire à reconstituer à leur sujet.

Avant d'adopter les premiers ordinateurs, nous restons peu désormais à avoir connu et surtout effectivement utilisé ces anciens outils lors de nos années d'études ou d'activités professionnelles ; notre devoir de « Vieilles Ferrites » est d'en transmettre le savoir-faire à nos successeurs.

5 BIBLIOGRAPHIE

i **Abdank-Abakanowicz**. Les intégraphes, la courbe intégrale et ses applications. Étude sur un nouveau système d'intégrateurs mécaniques. xp., 156p. Gauthier-Villars, Paris, 1886.[14]

ii **Biles** (John, Harvard). The Design and Construction of Ship. Vol. I : Calculations and strength. Charles Griffin and Co, London, 1908. viiip., 424p.

iii **Boys** (Charles Vernon). An Integrating Machine. Philosophical Magazine, Serie 5, vol. 11, n°69. pp.342-348.

iv **Coradi** (G.). Catalogue d'Orientation n°37. Institut Mécano-Mathématiqur, Zürich, sd. 21p. Mathematisch-mecanisches Institut, Zürich, 1910. 32p.

v **Coradi** (G.). Katalog über freischwebende Präzisions-Pantographen, Affinograffen, Instrumente zur mecanischen Integration, Kompasationsplanimeter, Kugel- und Scheibenplanimeter, Integratoren, Integraphen und Kurvimeter, Harmonische Analysatoren, Koordinatographen, detail-Koordinatographen und Koordinatometer, Koordinatenransformator. Mathematisch-mecanisches Institut, Zürich, 1910. 32p.

vi **Coriolis** (G.). Note sur un moyen de tracer des courbes données par des équations différentielles. Journal de mathématiques pures et appliqués ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques, tome 1. Bachelier, Paris, 1836. pp. 5-9[15].

vii **Johnstone** (J.G.). The Application of the Integraph to some Ship Calculations. Institution of Naval architects, 1907.

viii **Meyer zur Capellen** (Dr. -Ing. W.). Mathematische Instrumente. Mit 250 Figuren. Zweite ergänzte Auflage. Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik. Band I. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1944. x p., 313 p.

ix **Galle** (Prof. Dr. A.). Mathematische Instrumente. B.G. Teubner, Leipzig, Berlin, 1912. vi,p. 192p.

x **Lossier** (H.)[16]. der Integraph Abdank-Abakanowicz. Zeitschrift fur Instrumentenkunde, XXIV Jahrgang, 1904. pp.213/217.

xi **Morin** (H. de). Les appareils d'intégration. Intégrateurs simples et composés. Planimètres ; intégraphes et courbes intégrales ; analyse harmonique et analyseurs. Paris, Gauthiers-Villars, 1913. 208p.

xii **Ocagne** (Maurice d').Cours de géométrie. École Polytechnique, Paris, 1920-21. 292p.

xiii **Ocagne** (Maurice d').Cours de géométrie. École Polytechnique, Paris, 1934. 329p., 31p

xiv **Robb** (A. M. B.Sc.). IV. The use of Mechanical Integrating Machines in Naval Architecture. *in* : Charles Babbage Institute. Handbook of the Napier Tercentenary Celebration of Modern Instruments and Methods of Calculation. Volume III in the Charles Babbage Institute reprint series for the History of Computing. Tomah Publishers, Los Angeles, 1982. viiip., 356p. ISBN 0-938228-10-2.

xv **Savoysky** (Serge) Les Planimètres. In : Arts Mécanique. ANCMECA, Rochecorbon, 2001. pp.24/39.

xvi [**Science Museum**]. Catalogue of the collections in the Science Museum. Calculating Machines and Instruments. Originally ciloiled by D. Baxandall, revised & updated by Jane Pugh. Science Museum, sl., 1975. 102p., 30 planches. ISBN 0 901805 14 9.

12 Voir le n°196 de ce catalogue.

13 Cauchemar encore actuel des numériciens.

14 Cité dans : v, traduction allemande de 1889 citée dans : viii. Réimpression en fac-similé, Amazon, slnd.

15 L'exemplaire de la B.N. est une réédition de 1879 ; sa copie numérisée est accessible dans Gallica. La communication est citée par la plupart des auteurs dans cette bibliographie, ce qui assoit l'antériorité de l'idée de Coriolis.

16 Article attribué à un autre auteur : Hammer E., dans le catalogue de Coradi (v).